BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
F
36
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

XXXIV 7 36

GLI ELEMENTI
TEORICO-PRATICI
DELLE MATEMATICHE PURE

DEL PADRE

ODOARDO GHERLI
DOMENICANO

RESI PUBBLICI

DA DOMENICO POLLERA.

TOMO V.

NAPOLI

B. R. NAPOLIS

IN MODENA MDCCLXXIV.

PRESSO LA SOCIETA' TIPOGRAFICA

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Digitized by Google

Digitized by Google

AL REVERENDISSIMO PADRE

PAOLO FRISI

CHIERICO REGOLARE BARNABITA

PUBBLICO PROFESSORE DI MATEMATICA NELLE UNIVERSITA' DI MILANO, DI PISA, E DI BOLOGNA

Membro della Società Reale di Londra, dell' Accademia delle Scienze di Bologna, di Berlino, di Pietroburgo, di Stokolm, di Copenaghen, di Siena, di Lion, e Corriſpondente dell' Accademia Reale delle Scienze

F. ODOARDO GHERLI DOMENICANO

D. D. D.

LE Opere di Matematica, e quelle principalmente, che alle di lei parti più ſublimi ſon deſtinate, non ad altri certamente, che a Uomini Matematici, che ſoli poſſono bilanciarne il pregio, e col valor loro ſoſtenerle, e difendere, indirizzar ſi dovrebbero. Quindi da una tale verità prevenuto mi ſono io

Digitized by Google

l'onor proccurato di nobilitare in faccia al pubblico questo mio Corso di Matematica coi nomi chiarissimi di soggetti in questa scienza valenti, e rinomati, lo che pure nel pubblicare questo quinto Tomo di Calcolo differenziale mi glorio, e compiaccio d'essermi stato cortesemente accordato da voi, Reverendissimo Padre, che di gran Matematico fra i primi dell. nostra Italia l'alta riputazione godete. E ben tale vi appalesano tante vostre eccellenti Opere, tra le quali molte dalle più illustri Accademie approvate, e di premio onorate vantar voi potete: tale le più celebri Società letterarie, che a gara v'hanno al loro numero ascritto: tale le Università fra noi più cospicue, che a gloria si fanno di potervi contare nel Catalogo de' suoi Professori. A buona ragione pertanto a questo scarso tributo del profondo mio rispetto vi ho io prescielto, cui da gran tempo l'uniformità negli studj mi ha con soave violenza appressato, e unito mediante i più vivi sentimenti di stima, e venerazione: E questi sentimenti accoppiati alla più sincera riconoscenza andransi sempre più in me aumentando a misura, che onorandomi del favor vostro, godrò il contento di vedere il suo lustro in gran parte ritrarre questo mio lavoro dal sublime, e singolar vostro merito. Degnatevi adunque di risguardare in questa dedica il buon volere di chi ve l'offre, da cui se il pregio del dono valutar voi vorrete, sperar mi giova che corrispondente al desiderio mio sarà nell'accoglierlo il gradimento vostro.

IL CALCOLO DIFFERENZIALE.

Digitized by Google

Digitized by Google

L' EDITORE

A chi Legge.

AL compimento dell' Opera reſtano ancora due Tomi di Calcolo integrale, che ſortiranno dentro i due ſeguenti anni. Coll' ultimo Tomo ſi darà la Prefazione generale per tutti tre compreſo il preſente, cui dovrà eſſere prefiſſa.

IN.

Digitized by Google

INDICE DELLE MATERIE.

CAPO I.

Delle quantità differenziali, dei loro ordini, e della maniera di differenziare.

	Pag.	Nu.
ART. I. *Nozioni preliminari risguardanti il calcolo differenziale.*	1	1
ART. II. *Dei diversi ordini delle quantità differenziali.*	4	11
ART. III. *Del modo di differenziare.*	10	23
Regola generale per differenziare qualsisia formola algebraica, nella quale una sola, o più variabili abbiano luogo.	16	35
ART. IV. *Della maniera di differenziare le quantità logaritmiche, ed esponenziali.*	19	40
ART. V. *Della maniera di differenziare le funzioni di circolo, e i seni, e coseni iperbolici.*	25	53
ART. VI. *Della maniera di prendere i differenziali di secondo, terzo ec. grado di una proposta quantità.*	44	102
ART. VII. *Della maniera di differenziare le funzioni inesplicabili.*	73	138
ART. VIII. *Della maniera con cui da una proposta formola eliminare si possono i differenziali secondi, terzi ec., del modo di passare alla supposizione di un differenziale costante in quelle formole, in cui niun differenziale è stato assunto costante,* e vice versa; *e di passare da uno alla supposizione di un'altro costante.*	120	171
ART. IX. *Della maniera di liberare dall'assimetria le quantità differenziali.*	149	203
ART. X. *Della maniera di determinare il valore di quelle frazioni, nelle quali la sostituzione di una certa quantità in luogo della variabile manda a zero tanto il numeratore, che il denominatore.*	172	225

CAPO II.

Del metodo diretto delle Tangenti.

ART. I. *Modo di determinare il valore della subtangente, della tangente di una data curva.*	193	238
ART. II. *Della maniera di trovare il valore della normale, della subnormale, e di altre linee analoghe nelle curve tanto algebraiche, che trascendenti, e a doppia curvatura.*	230	280
ART. III. *Degli Asintoti.*	241	295
ART. IV. *Dei Massimi, e dei Minimi.*	253	306
ART. V. *Della maniera di determinare i punti di flesso, e di regresso.*	299	356
ART. VI. *De' raggi osculatori.*	321	381

CAPO III.

Delle Equazioni differenziali.

ART. I. *Riflessioni generali su le equazioni differenziali.*	360	415
ART. II. *Della maniera di ridurre al primo grado le equazioni differenzio-differenziali, o sia le equazioni differenziali di secondo grado, in cui entrano due sole variabili.*	366	427

CA-

Digitized by Google

CAPO I.

Delle quantita' differenziali, dei loro ordini, e della maniera di differenziare.

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari risguardanti il calcolo differenziale.

1. Sotto doppia considerazione suol cadere presso i Geometri la quantità continua, come abbiamo veduto nel precedente Tomo IV.: O si considera cioè come costante, o si considera come variabile. La quantità, che si prende per costante è quella, che, persistendo sempre nel suo grado, e misura, non subisce menoma variazione d'incremento, o decremento: All' opposto la quantità variabile è continuamente soggetta a ingrandimento, o diminuzione.

2. Abbiamo veduto ai num. 13., 212., 478. Tomo III., che la genesi della quantità continua si ripete dal flusso di un elemento atto a produrla. Allorchè l' elemento posto in moto continua il suo flusso, la quantità acquista continuamente nuovi incrementi, e si fa successivamente maggiore: Ma se l' elemento generatore dopo un certo tempo di flusso ritornerà indietro verso il termine, da cui partì, da questo punto di regresso comincierà la quantità a patire decremento, e a divenire susseguentemente minore. La sola nozione poi di un elemento fluente, il di cui moto vien misurato dal tempo, che nella sua durazione deve passare per tutti i possibili momentanei gradi, dà a ravvisare, che la quantità nell' acquistare un' incremento, o decremento finito deve necessariamente passare per tutti i possibili gradi, che trovansi fra il zero, e il detto incremento, o decremento finito.

3. Se pertanto di due quantità variabili gli elementi generatori scorreranno in modo, che in tempi eguali venganfi a generare porzioni di quantità proporzionali alle quantità intere, anche i tra loro corrispondenti gradi di quantità interposti fra il zero, e un' incremento, o decremento finito, osserveranno fra se la stessa ragione, che hanno le quantità intere. E siccome la ragione, che hanno fra loro due corrispondenti gradi di quantità, compete egualmente a tutti gli altri maggiori, o minori gradi di quantità, fino a che per ultimo svaniscano, e passino a zero; quindi è, che se per mezzo di due degli accennati corrispondenti gradi di quantità si determinerà la ragione, che passa tra le quantità finite, delle quali essi sono gradi, questa ragione in tal modo determinata sussisterà la stessa, ancorchè i detti gradi si riducano evanescenti, o sia si facciano passare a zero.

4. Questi, che ho chiamati gradi di quantità interposti fra il zero, e un incremento, o decremento finito, se sono minori di qualsivoglia quantità assegnabi-

le, vengono sotto il nome di quantità infinitamente piccole. Acquistano eziandio il nome di quantità differenziali, ogniqualvolta vengono esse a costituire la differenza, con cui una quantità supera, o viene superata da un'altra.

5. Nel calcolo differenziale hanno luogo queste quantità differenziali, o sia infinitamente piccole; su di loro però egli non si fonda, ma soltanto se ne serve a trovare per mezzo loro i limiti del rapporto, che passa fra proposte finite quantità variabili: Onde propriamente il calcolo differenziale non è altro, che il metodo delle ultime ragioni.

6. Per dare tutta la possibile chiarezza all'esposta dottrina, mi servirò d'un esempio. Debbasi condurre la tangente al punto C del dato circolo CFG [*Fig.*1.]. Dal proposto punto C si abbassi al diametro KF l'ordinata CE, onde si abbia $KE = x$, $EC = y$. A una qualunque arbitraria distanza da CE si conduca un'altra ordinata ec, e dal punto C si tiri la retta CH parallela al diametro KF, poscia pei punti C, c si faccia passare la retta A Cc. La tangente, che compete al punto C sia CB. Ciò posto sono simili i due triangoli CHc, AEC. Ora a motivo di $EB < EA$ egli è evidente, che la ragione di CE ad EB è maggiore della ragione di CE ad EA, o sia della ragione di cH ad HC. Ma se si supporrà, che la distanza Ee delle due ordinate essendo variabile si vada continuamente diminuendo, così che il punto c si vada accostando al punto C, quanto più il punto c si avvicinerà al punto C, anche il punto A si accosterà al punto B, lo che fa, che la ragione di CE ad EA, o sia di cH ad HC si vada accostando all'eguaglianza colla ragione di CE ad EB. Ora i punti c, C si possono tanto accostare fra loro, che le quantità cH differenza delle ordinate CE, ce, e CH differenza delle abscisse KE, Ke si riducano all'ultimo limite, oltre il quale si facciano tosto evanescenti, nel qual caso il punto A viensi ad unire col punto B, e la ragione di CE ad EA si fa eguale alla ragione di CE ad EB. Se adunque mediante l'ultima ragione delle cH, HC si troverà il rapporto di CE ad EB, che è il limite della ragione di cH ad HC, con render poscia evanescenti le cH, HC, si otterrà finalmente il vero rapporto di CE ad EB, o sia dell'ordinata alla subtangente, mercè che restando determinato il punto B, se pei punti C, B si condurrà la retta BC, essa sarà la tangente cercata. Cerchiamo adesso l'espressione algebraica del limite del rapporto di cH ad HC, o sia l'espressione algebraica del rapporto di CE ad EB, vale a dire dell'ordinata alla subtangente. A tale oggetto si prenda l'equazione al circolo, che, con fare il raggio $PK = r$, è $2rx - x^2 = y^2$: In oltre si riducano all'ultimo limite le quantità cH, HC, onde con chiamare $CH = z$, $cH = u$, si avrà $Ke = KE + Ee = x + z$, e $ce = cH + He = y + u$;

onde rispetto alle coordinate Ke, ec l'equazione al circolo è $\overline{2r - x - z} \times \overline{x + z} = \overline{y + u}^2$, cioè $2rx + 2rz - x^2 - 2xz - z^2 = y^2 + 2yu + u^2$. Da questa equazione si sottragga la precedente, e il residuo sarà $2rz - 2xz - z^2 = 2yu + u^2$. Mediante questa equazione si trovi il rapporto di u a z, che è $u : z :: 2r - 2x - z : 2y + u :: r - x - \frac{z}{2} : y + \frac{u}{2}$. Se pertanto si renderanno adesso evanescenti le u, z, vale a dire si ridurranno a zero, il rapporto trovato $r - x - \frac{z}{2} : y + \frac{u}{2}$ di-

diverrà $r-x:y$, che è la cercata espressione algebraica del rapporto dell'ordinata alla subtangente. Di fatto in generale la ragione di cH ad HC, dovunque si prenda il punto c, viene espressa dalla ragione $r-x-\frac{z}{2}:y+\frac{u}{2}$, che è minore della ragione $r-x:y$; ma a misura che si fanno minori le quantità z, u, va crescendo la ragione di $r-x-\frac{z}{2}$ a $y+\frac{u}{2}$. Poichè adunque le quantità z, u si possono prendere piccole quanto si vuole, si può con ciò fare, che il rapporto $r-x-\frac{z}{2}:y+\frac{u}{2}$ si accosti quanto si vuole al rapporto $r-x:y$. Questo rapporto adunque $r-x:y$ è il limite del rapporto $r-x-\frac{z}{2}:y+\frac{u}{2}$. Dunque ottimamente con fare in ultimo eguali a zero le z, u, si è trovata l'espressione algebraica del rapporto dell'ordinata alla subtangente. Che però avendosi CE $[=y]$: $EB::r-x;y$, si ottiene l'espressione generale della subtangente nel circolo, che è $BE=\frac{y^2}{r-x}=\frac{2rx-x^2}{r-x}$ con sostituire $2rx-x^2$ in luogo di y^2, cui è eguale, come costa dall'equazione del circolo. Ora questa equazione $BE=\frac{2rx-x^2}{r-x}$ messa in proporzione somministra $2r-x:r-x::BE:x$, da cui per division di ragione [giusta il num. 524. Tom. I.] si ottiene $r:r-x::BE-x:x$, o sia $BE-x:r::x:r-x$, e *componendo* [giusta il num. 522. Tom. I.] $BE-x+r$ $[=PB]$: r $[=PK]$ :: r $[=PK]$: $r-x$ $[=PE]$, lo che corrispondendo a quanto si è detto al num. XXV. Tom. IV., fa vedere, che l'espressione $\frac{2rx-x^2}{r-x}$ è il vero valor generale della subtangente nel circolo; del che per altro si poteva accerrare ancora operando a norma del num. 674. Tomo IV.

7. Col nome pertanto di quantità differenziali, e infinitamente piccole devonsi intendere quantità minori di qualsivoglia quantità assegnabile: *Vice versa* col nome di quantità infinite, o infinitamente grandi hansi a intendere quantità maggiori di qualunque quantità assegnabile; siccome sotto il nome di quantità finite vengono quelle, che in se stesse sono determinate, nè accrescersi, o diminuirsi si concepiscono oltre certi determinati limiti.

8. Queste quantità infinitamente piccole, con cui intendonsi subire aumento, o decremento le quantità variabili, e che dagli Inglesi col Newton chiamansi col nome di flussioni, o quantità fluenti, in quanto che le considerano come aumento, o decremenro momentaneo della quantità fluente, si sogliono disegnare mediante la caratteristica d: Come se la quantità variabile sarà espressa da x, il di lei aumento, o decremento infinitamente piccolo verrà rappresentato da dx: Onde l'espressione della variabile accresciuta o diminuita del suo elemento sarà $x\pm dx$. A fine pertanto di evitare ogni confusione la lettera d in avvenire non si usurperà,

rà, che come caratteristica delle quantità infinitesime, e per qualunque altro uso sarà perpetuamente esclusa dal calcolo.

9 Qualora le quantità variabili, dal cui aggregato risulta una qualche formola, hanno mutua relazione fra loro, non si può dare benchè menomo aumento, o decremento ad una, senza che lo stesso si faccia anche rispetto alle altre: Per esempio se rispetto alla curva ABb (*Fig.* 2., 3.) si accrescerà, o diminuirà l' abscissa AC della quantità infinitamente piccola Cc, sarà la nuova abscissa $Ac = AC \pm Cc = x \pm dx$, e la corrispondente ordinata $cb = CB \pm eb = ce \pm eb = y \pm dy$ (il segno + vale per la figura 2, e il segno — per la figura 3.); e con dire l' arco $AB = t$, e lo spazio $ACB = s$, sarà $Ab = AB \pm Bb = t \pm dt$, ed $Acb = ACB \pm BCcb = s \pm ds$. Si è fatto uso del segno ±, perchè le quantità differenziali devono essere affette dal segno + quando per mezzo loro crescono le variabili, e all' opposto devono essere affette dal segno —, se le variabili calano.

10. Il Newton si è servito del punto affisso alla variabile per caratteristica in luogo della lettera d, scrivendo $\dot{x}$ in vece di dx.

ARTICOLO II.

Dei diversi ordini delle quantità differenziali.

11. AL num. 4. quelle rispetto alla quantità finita si sono chiamate quantità differenziali, o infinitamente piccole, che sono minori di qualunque assegnabile quantità finita, e queste diconsi quantità differenziali del primo ordine, relativamente al che quelle si chiamano quantità differenziali del secondo ordine, che sono infinitamente minori di qualsivoglia quantità differenziale del primo ordine, siccome queste sono infinitamente minori di qualunque quantità finita. Istessamente quelle, che sono infinitamente minori di qualsivoglia quantità differenziale del secondo ordine vengono sotto il nome di quantità differenziali del terzo ordine ec.. L' ordine adunque, che compete a queste varie quantità differenziali viene specificato dalla proporzione, che regna fra loro: Per lo che se si avrà una progressione geometrica decrescente a, b, c, d, e, f ec., il di cui primo termine a sia una quantità finita, ed il secondo b un' infinitesimo del primo ordine, sarà il terzo c un' infinitesimo del secondo ordine, il quarto d un' infinitesimo del terzo ec.

12. Da ciò ne segue, che quella quantità, a cui un' infinitesima di qualche ordine ha la stessa ragione, che ha una quantità finita ad un' altra finita, è un' infinitesima dello stesso ordine; ma quella, a cui un' infinitesima di qualche ordine ha la stessa ragione, che ha una quantità finita ad un' infinitesima del primo ordine, è un' infinitesima del prossimo ordine superiore; e quella, a cui un' infinitesima di qualche ordine ha la stessa ragione, che una infinitesima del primo ordine ha ad una quantità finita, è un' infinitesima del prossimo ordine inferiore. Generalmente quella quantità, a cui un' infinitesima di qualche ordine ha la stessa ragione, che ha una quantità finita ad una infinitesima di qualsivoglia ordine, è un' infinitesima di un' ordine rispetto a quello superiore di tanti gradi, quanti ne mostra la distanza di questo dalla quantità finita; e quella, a cui un' infinitesima di qualche ordine ha la stessa ragione, che ha un' infinitesima di un qualunque ordine a una quantità finita, è un' infinitesima d' un ordine rispetto a quello inferiore di tanti gradi, quan-

quanti ne mostra la distanza di quest'altro dalla quantità finita. Per esempio sia $b^m : A :: c^n : d^x$, in cui la lettera A rappresenta una quantità finita, e gli esponenti m, n, x esprimono i numeri esibenti gli ordini delle quantità infinitesime b, c, d, qualora sia $m=3$, $n=5$, sarà $x=2$: O pure se si avrà $A : b^m :: d^n : c^x$, ed m sia $=2$, $n=4$, sarà $x=6$.

13. Egli è quindi facile il ravvisare, come analogamente agli ordini degli infinitesimi si debbano distinguere gli ordini delle quantità infinitamente grandi: Sia a cagion d'esempio la progressione geometrica ascendente a, b, c, d, e ec., se il primo termine a sarà una quantità finita, e il secondo b una quantità maggiore di qualsivoglia quantità finita, vale a dire una quantità infinitamente grande del primo ordine, sarà il terzo c una quantità infinitamente grande del secondo ordine, il quarto d un'infinitamente grande del terzo ordine ec.: E però rispetto a queste quantità infinitamente grandi varrà quanto rispetto alle quantità infinitamente piccole si è detto al precedente num. 12.. Anzi colla scorta di questi due num. 12., 13. si saprà assegnare alla quantità, che occupa il quarto termine della proporzione, l'ordine, che o tra le quantità infinite, o infinitamente piccole a lei compete, comunque le quantità occupanti gli altri tre termini della proporzione siano o finite, o infinitamente grandi, o infinitamente piccole.

14. Ora a chi avrà ben intese le cose dette non riuscirà difficile il conoscere che ordine fra le quantità o infinitesime, o infinitamente grandi debba competere al prodotto nato dalla moltiplicazione o di quantità infinitesime, o infinitamente grandi, o dell'una, o dell'altra spezie con quantità finite. Lo stesso si dica del quoziente rispetto alla divisione, poichè nella moltiplicazione la somma dei numeri esprimenti gli ordini de' fattori esibisce l'ordine del prodotto, e nella divisione la loro differenza esprime l'ordine del quoziente: Che però il prodotto nato dalla moltiplicazione della quantità infinitesima a^m nell'infinitesima a^n è a^{m+n} infinitesimo dell'ordine $m+n$. Qualora sia $m=0$, il prodotto sarà a^n infinitesimo dell'ordine n; o pure essendo $n=0$, il prodotto sarà a^m infinitesimo dell'ordine m. Il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi l'infinito a^{-m} per l'infinito a^{-n} è a^{-m-n} infinito dell'ordine $m+n$. Supponendo $m=0$, il prodotto sarà a^{-n} infinito dell'ordine n, e supponendo $n=0$, il prodotto sarà a^{-m} infinito dell'ordine m. Con moltiplicarsi la quantità infinitesima a^m nell'infinitamente grande a^{-n}, si ha di prodotto a^{m-n} infinitesimo dell'ordine $m-n$ quando $m>n$, e infinito dell'ordine $n-m$ quando $m<n$, e quantità finita quando $m=n$; e qui se accaderà, che sia $m=0$, il prodotto sarà a^{-n} infinito dell'ordine n, se poi si avrà $n=0$, il prodotto sarà a^m infinitesimo dell'ordine m: (già è noto, che una quantità avente per esponente il zero è una quantità finita, che è $=1$ pel num. 97. Tomo II.). Dividendosi l'infinitesimo a^m per l'infinitesimo a^n, il quoziente sarà a^{m-n} infinitesimo dell'ordine $m-n$, quando $m>n$, e infinito dell'ordine $n-m$, quando $m<n$, e finalmente quantità finita quando $m=n$: Accadendo che sia $m=0$, il quoziente sarà a^{-n} infinito dell'ordine n, ed essendo $n=0$, si avrà il quoziente a^m infinitesimo dell'ordine m. Il quoziente, che nasce dal dividersi l'infinito a^{-m} per l'infinito a^{-n} è a^{-m+n} infinito dell'ordine $m-n$, quando $m>n$, e infinitesimo dell'ordine $n-m$, quando $m<n$, e quantità finita quando $m=n$: Se sarà $m=0$, si avrà di quoziente a^n infinitesimo dell'ordine n, ma se sarà $n=0$, si avrà di quoziente a^{-m} infinito dell'ordine m. Con dividersi l'infinitesimo a^m per l'infinito a^{-n}, ne viene di quoziente a^{m+n} infinitesimo dell'ordine $m+n$: Ogniqualvolta sia $m=0$, il quoziente sarà a^n infinitesimo dell'ordine n, ed essendo $n=0$, il quo-

ziente-

Digitized by Google

ziente ſarà a^m infiniteſimo dell'ordine m. Per ultimo ſe ſi dividerà l'infinito a^{-m} per l'infiniteſimo a^n, il quoziente ſarà a^{-m-n} infinito dell'ordine $m+n$, dove ſe $m=0$, il quoziente ſarà a^{-n} infinito dell'ordine n, e ſe $n=0$, il quoziente ſarà a^{-m} infinito dell'ordine m.

15. Coerentemente a quanto ſi è detto al num. 11. chiaramente ſi intende, che il quadrato di una quantità infinitamente piccola è un'infiniteſimo del ſecondo ordine, il cubo è un'infiniteſimo del terzo, il quadrato-quadrato è un'infiniteſimo del quarto ec., poichè (pel num. 730 Tomo I.) l'unità, la radice, il quadrato, il cubo, il quadrato-quadrato, il quadrato-cubo ec. ſtanno in proporzione continua: Onde ſe l'infiniteſimo ſarà dx, $\overline{dx}^2$ ſarà un' infiniteſimo del ſecondo ordine, $\overline{dx}^3$ un'infiniteſimo del terzo ec.

16. Lo ſteſſo, che ſi è detto delle quantità infinitamente piccole, deveſi intendere ancora delle quantità infinite, cioè ſe x rappreſenta una quantità infinita, ſarà x^2 un infinito del ſecondo ordine, x^3 un'infinito del terzo ec.

17. Fra queſti varj ordini poi tanto degli infiniti, che degli infinitamente piccoli, i di cui eſponenti ſono numeri interi, ne cadono infiniti altri, che hanno per eſponenti numeri fratti: Per eſempio fra l'unità, e la quantità infinita x cade $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, $x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$ ec.: Così fra la quantità infinita x, ed x^2 cade $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^1}$, $x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}$ ec.: E così in poi, lo che pure ſi dica riſpetto agli infinitamente piccoli.

18. Ora che ho eſpoſto il ſicuro criterio per conoſcere a qual ordine debbaſi riportare una qualſiſia propoſta quantità infiniteſima, o infinitamente grande, andrò ſcorrendo per varii caſi particolari, acciò con ridurre l'eſpoſta dottrina alla pratica, meglio ciaſcuno impoſſeſſar ſe ne poſſa, e aſſicuratſi di non isbagliare ne' varii rapporti, che fra queſte quantità iſtituire ſi debbono. E primieramente affinchè quattro finite quantità variabili proporzionali ſuſſiſtano nella medeſima proporzione anche dopo eſſere ſtate aumentate, o diminuite di quantità infinitamente piccole, fa di meſtiere (giuſta il num. 567. Tomo I.), che queſti infiniteſimi ſtiano fra loro nella ſteſſa proporzione delle quantità propoſte: Come avendoſi $x : y :: z : u$, acciò ſia $x+dx : y+dy :: z+dz : u+du$ proporzione iſteſſa, che la precedente, deve valere $dx : dy :: dz : du$ per modo, che ſi abbia $x : y :: dx : dy$, e $z : u :: dz : du$. Generalmente poi avendoſi $x : y :: z : u$, acciò ſuſſiſta in qualſiſia proporzione $x+dx : y+dy :: z+dz : u+du$, baſta che ſia comunque $dx : dy :: dz : du$. Quanto al primo caſo tutti gli infiniteſimi dx, dy, dz, du devono eſſere dello ſteſſo ordine, ſtante che ſono proporzionali a quantità finite, le quali ſono in un medeſimo ordine; nel ſecondo caſo poi dz deve eſſere dello ſteſſo ordine di dx, e du di dy, poichè queſti infiniteſimi ſono proporzionali ſoltanto fra ſe, non già alle quantità finite, onde baſta, che dello ſteſſo ordine ſiano ſoltanto i termini omologhi. Per la ſteſſa ragione addotta riſpetto al primo caſo ſe i due primi termini di una ſerie di quantità in proporzione continua del medeſimo ordine

Digitized by Google

ne differiranno per una quantità infinitesima, tutte le differenze dei rimanenti prossimi termini della serie saranno infinitesimi dello stesso ordine.

19. Che se due quantità finite differiranno fra loro d'una quantità infinitesima, anche le loro potestà dello stesso grado avranno per differenza un'infinitesimo dello stesso ordine, vale a dire dello stesso ordine è l'infinitesimo, con cui differiscono tanto x, y, che x^m, y^m (supposto che m sia un numero finito): Di fatto si prenda z, che sia il termine $m+1$ continuo proporzionale dopo x, y, e (giusta il num. 1060. Tomo I.) si avrà $x : z :: x^m : y^m$, e (pel num. 524. Tomo I.) $x-z : z :: x^m - y^m : y^m$; ma a tenore del num. 18. l'infinitesimo, con cui differiscono i due termini $x-z$, z è dello stesso ordine, che quello, con cui differiscono i due termini x, y, poichè l'aggregato risultante da un'infinitesimo preso un finito numero di volte sussiste dello stesso ordine, in cui è il detto infinitesimo, mentre acciò passi a un'altro ordine, fa d'uopo, che l'infinitesimo si prenda un numero infinito di volte, come si raccoglie dal num. 11.; dunque a uno stesso ordine appartengono gli infinitesimi, con cui differiscono x, y, ed x^m, y^m.

20. Poichè (pel num. 122. Geom. Tom. III.) gli angoli stanno in ragione degli archi, che ne sono la misura, (1°.) agli angoli infinitamente piccoli corrispondono archi infinitesimi dello stesso ordine, e *vice versa*, avvegnachè se un dato angolo finito si dirà $=A$, il suo arco $=a$, e un'angolo infinitesimo $=A'$, il suo arco $=a'$, si avrà $A : a :: A' : a'$, ed $A : A' :: a : a'$. Posto ciò ricerchiamo gli ordini delle altre quantità dipendenti da un'arco infinitesimo: Sia CE (*Fig.* 4.) un'arco infinitesimo di cerchio, la di lui tangente sia CD, la corda CE, il seno retto BE, e il seno verso BC; a motivo dei due triangoli simili ADC, AEB si ha AC: AB:: CD: BE, ma AC, AB sono quantità finite, dunque (2°.) la tangente CD, e (3°.) il seno retto BE sono dello stesso ordine. Parimente essendo simili i due triangoli FEB, BEC, si ha FB: FE:: BE: CE; e siccome FB, FE sono quantità finite, così (4°.) dello stesso ordine sono il seno retto BE, e la corda CE. Dello stesso ordine sono adunque il seno retto, la corda, e la tangente di un'arco infinitesimo: Ma se su la periferia del circolo si prenderanno quanti archi si può eguali all'infinitesimo CE, essi avranno le corde tutte eguali fra loro, come lo sono gli archi, e però starà l'arco CE alla sua corda CE, come sta la somma di tutti gli archi alla somma di tutte le corde. Resta adunque dimostrato (5°.), che l'arco, e la corda sono dello stesso ordine, mentre sono due quantità finite la somma di tutti gli archi, e la somma di tutte le corde; Dunque sono infinitesimi dello stesso ordine l'arco, la corda, il seno retto, e la tangente. In oltre essendo ∺ FB: BE: BC, in cui FB è quantità finita, BE infinitesima del primo ordine, se tale è l'arco CE, sarà BC seno verso infinitesima (6°.) del secondo ordine; e perchè i due triangoli simili ABE, ACD somministrano AB: AE:: BC: ED, perciò (7°.) la porzione ED della secante intercetta fra la tangente, e la periferia è un'infinitesima dello stesso ordine della BC, vale a dire è infinitesima del secondo ordine, se l'arco CE è infinitesimo del primo. Che se su la proporzione precedente AE: AB :: ED: BC si argomenterà *dividendo* così AE—AB [=CB]: AB:: ED—BC: BC, o sia AB: BC:: BC: ED—BC, si troverà (8°.), che essendo BC infinitesima del secondo ordine, la differenza tra ED, e BC è infinitesima del quarto. Così pure dalla proporzione AC: AB:: CD: BE si ricava AC—AB [=BC]: AB:: CD—BE [$=aD$]: BE, o sia AB: BC:: BE: aD; che però essendo AB quantità finita, BE infinitesima del primo ordine, BC del secondo, sarà [9°] del terzo ordine la dif-

differenza fra la tangente CD, e il feno BE, fuppofto fempre, che l'arco CE fia infinitefimo del primo. Del terzo ordine pure è la differenza, che paffa tra il feno BE, e la corda CE, poichè effendo fimili i due triangoli FEB, BEC, fi ha FE: FB:: EC: EB, e (pel num. 530. Tomo I.) FE: FE — FB:: EC: EC—EB: Ma perchè l'angolo BFE è infinitefimo del primo ordine, mentre tale fi fuppone l'arco CE, FE—FB è un infinitefimo del fecondo (pel 7°.); dunque effendo FE quantità finita, FE—FB infinitefima del fecondo ordine, EC del primo, EC—EB, che è la differenza tra la corda, e il feno retto, è infinitefima del terzo. Siccome gli angoli, e i loro archi fono dello fteffo ordine, e dello fteffo ordine pure fono gli archi, e i loro feni retti, corde, e tangenti, perciò gli angoli, e le loro corrifpondenti corde, tangenti, e feni fono del medefimo ordine. Quindi fe in un triangolo rettangolo ACD uno degli angoli alla bafe, come l'angolo CAD farà infinitefimo, farà il lato oppofto CD infinitefimo dello fteffo ordine (10°.), e gli altri due lati AC, AD differiranno per un'infinitefimo del fecondo ordine; in fecondo luogo effendo infinitefimo l'angolo CAD, l'altr'angolo ADC differirà dal retto (11°.) per un'infinitefimo dello fteffo ordine, in cui è l'angolo CAD. Se il triangolo farà ifofcele, e l'angolo al vertice fia infinitefimo, come BA*b* (*Fig.* 5.), infinitefima dello fteffo ordine farà la bafe B*b* (12°.). Parimente nel triangolo acutangolo fcaleno A*c*B (*Fig. fteffa*) il lato B*c* oppofto all'angolo infinitefimo A del primo ordine è infinitefimo dello fteffo ordine (13°.): Di fatto dall'angolo maggiore B fi abbaffi perpendicolare al lato A*e* la B*e*, che effendo feno retto dell'angolo A, è (pel 5°.) infinitefima del medefimo ordine; ma perchè l'angolo *e*B*c* è infinitefimo dello fteffo ordine dell'angolo A, le due B*e*, B*c* non differifcono, che d'un infinitefimo del fecondo ordine [pel 7°.], dunque B*e*, B*c* fono infinitefime dello fteffo ordine, confeguentemente ficcome B*e* è infinitefima dello fteffo ordine, che l'angolo A, così infinitefimo dello fteffo ordine è il lato a lui oppofto B*c*. Ho detto, che l'angolo *e*B*c* è infinitefimo del primo ordine, e lo dimoftro: La fomma dei due angoli AB*c*, A*c*B differifce da due angoli retti di tanto, quanto è l'angolo infinitefimo A; dunque ognun di loro, poichè acuto, differifce da un retto d'una quantità infinitefima minore dell'angolo A: Ora l'angolo A*c*B è minore [per ipotefi] dell'angolo AB*c*; dunque la quantità con cui l'angolo A*c*B differifce da un retto è maggiore di quella, con cui ne differifce l'angolo AB*c*, che però deve neceffariamente effere infinitefima del primo ordine, poichè fe foffe infinitefima del fecondo, o pure di qualch'altro ordine fuperiore, molto più lo farebbe la differenza dell'angolo AB*c* dall'angolo retto, onde la fomma delle differenze di quefti due angoli A*c*B, AB*c* da due retti non potrebbe effere un infinitefimo del primo ordine, confeguentemente non potrebbe effere eguale all'angolo A, che [per ipotefi] è infinitefimo del primo ordine: Ora *e*B*c* è la differenza, con cui l'angolo A*c*B fi fcofta da un retto, avvegnachè effendo retto l'angolo B*ec*, i due *ec*B, *e*B*c* eguagliano un retto: Dunque l'angolo *e*B*c* è infinitefimo del primo ordine. Stante che [14°.] nel triangolo rettangolo la differenza dei due lati, che comprendono l'angolo infinitefimo del primo ordine è un'infinitefimo del fecondo ordine [pel 7°.], fe in un triangolo ottufangolo ADC [*Fig.* 6.] i due angoli A, D faranno infinitefimi del primo ordine, la differenza, che paffa fra il lato AD, e l'aggregato de'due lati AC, CD, farà un'infinitefimo del fecondo ordine: Tutti i lati poi AD, AC, CD fono dello fteffo ordine, poichè [pel 10°.] con condurfi dall'angolo ottufo C al lato oppofto AD la perpendicolare CB, quefta CB è infinitefima tanto rifpetto a CD, che rifpetto ad AC, ficcome lo è rifpetto ad AD; onde AD, AC, CD

fono

Digitized by Google

ſono dello ſteſſo ordine. Che ſe nel triangolo ottuſangolo ADC il ſolo angolo A ſarà infinitesimo, infinitesimo dello ſteſſo ordine ſarà il di lui lato oppoſto CD, eſſendo che con condurſi dall' angolo ottuſo C al lato oppoſto AD la perpendicolare CB, nel triangolo CBD tutti gli angoli ſono finiti, e in conſeguenza tutti i di lui lati ſono dello ſteſſo ordine; ma BC è infiniteſimo dello ſteſſo ordine dell' angolo A, dunque (15°.) infiniteſimo pure del medeſimo ordine è il lato a lui oppoſto CD. Ciò poi ha luogo ſoltanto qualora i due lati, che comprendono l' angolo infiniteſimo ſono finiti, che ſe ſaranno infiniteſimi dello ſteſſo ordine, in cui è l'angolo da loro compreſo, come nel triangolo CED (*Fig.* 4.), il di cui angolo ECD è infiniteſimo del primo ordine, e infiniteſimi dello ſteſſo ordine ſono i due lati CE, CD, infiniteſimo del ſecondo ordine è (16°.) il lato oppoſto ED, come ſi è dimoſtrato al 7°.: Onde (17°.) i lati ſtanno tra loro in ragione degli angoli oppoſti. Nel circolo CEF (*Fig.* 4.) eſſendoſi preſo l'arco CE infiniteſimo del primo ordine, è facile il vedere, che il ſegmento C*e*, E*c*C è infiniteſimo del terzo, poichè dal centro A del circolo tirandoſi al punto *e* metà dell'arco CE il raggio A*e*, è *ce* il ſeno verſo dell'arco C*e*, e però quantità infiniteſima del ſecondo ordine (pel 6°.); dunque ſiccome tanto la corda CE, come la ſua metà C*c* è un' infiniteſimo del primo ordine, tanto il prodotto di *ec* in CE, che di *ce* in C*c* è un' infiniteſimo del terzo ordine (pel num. 14.); ma fra queſti due prodotti media il ſegmento C*e*E*c*, egli è perciò (18°.) infiniteſimo del terzo ordine: Parimente perchè E*a* (=BC) è infiniteſima del ſecondo ordine, e la metà di CD è infiniteſima del primo, il prodotto di E*a* in $\frac{CD}{2}$, o ſia il triangolo CED è infiniteſimo del terzo, conſeguentemente E*e* CD, che è la differenza fra il triangolo ECD, e il ſegmento C*e*E*c*, è infiniteſimo (19°.) del terzo ordine. Per ultimo il triangolo AEC, che riſulta dal prodotto della metà di AC quantità finita, e di BE infiniteſima del primo ordine, è infiniteſimo del primo ordine; dunque infiniteſimo del primo ordine è pure il ſettore (20°.) AC*e*EA riſultante dall' aggregato del triangolo AE*e*C infiniteſimo del primo ordine, e del ſegmento C*e*E*c* infiniteſimo del terzo.

21. Molte delle coſe dette riſpetto al circolo hanno generalmente luogo nelle curve. Sia [*Fig.* 7] BCEF una curva qualunque, ſu la quale ſi prenda un'arco infiniteſimo CE, la di cui ſotteſa è CGE. Queſta ſi divida per metà in G, dal qual punto ſi alzi perpendicolare l'indefinita GA. Delle eſtremità C, E della ſotteſa ſi alzino le CA, EA, che vadano a incontrarſi nel punto A ſu la retta GA. Stante ciò il triangolo ECA è iſoſcele, e il di lui angolo A è infiniteſimo dello ſteſſo ordine dell' arco CE, che ſupponiamo del primo: Infiniteſima adunque del primo ordine ſarà ancora la ſotteſa CE. Ai punti C, E ſi conducano le tangenti CD, ED, onde ſaranno retti gli angoli AED, ACD, dai quali ſe ſi leveranno gli angoli eguali AEG, ACG, reſteranno eguali, e infiniteſimi gli angoli GED, GCD, ed eguali pure ſaranno le tangenti ED, CD: Per lo che i triangoli ADE, AGE, DGE ſono eguali, e ſimili ai triangoli ADC, AGC, DGC. Si ha pertanto ∺ AG: GE : GD; dunque perchè AG è quantità finita, GE infiniteſima del primo ordine, GD (1°.) è infiniteſima del ſecondo: Parimente infiniteſima del ſecondo ordine è la D*a*, ſtante che nel triangolo C*a*D i due angoli C*a*D, CD*a* eſſendo finiti, e l' angolo DC*a* infiniteſimo, il di lui oppoſto lato D*a* è infiniteſimo riſpetto al lato CD; ma queſti è infiniteſimo del primo ordine, onde D*a* è infiniteſimo del ſecondo. Che ſe col centro E, raggio EG ſi deſcriverà l'archetto G*e*, ſaranno ſimili

i due triangoli EDG, GD*e*, e però si avrà ∺ ED: DG: D*e*; onde essendo ED infinitesima del primo ordine, DG del secondo, la D*e* differenza tra EG metà della sottesa, e la tangente DE è (2°.) infinitesima del terzo ordine. Quindi perchè l' arco E*a* è maggiore della EG, meno della medesima egli differisce dalla tangente ED, conseguentemente un' arco infinitesimo di curva si può considerare come una retta, che coincida colla tangente, colla corda, e col seno (3°.). Per lo che (4°.) si possono riguardare le curve come poligoni aventi un numero infinito di lati infinitamente piccoli. Se dalle estremità E, *e* (*Fig.* 8. 9) di un arco E *e* infinitesimo del primo ordine d' una qualsivoglia curva si abbasseranno al diametro AP due ordinate EC, *ec*, indi dall' estremità E dell' ordinata CE si conduca parallela al diametro AP la retta E*b*, che vada a incontrare in *b* l' altra ordinata, così che sia E*b* la differenza delle abscisse AC, A*c*, ed *be* la differenza delle ordinate CE, *ce*, qualora con condursi la sottesa E *e* tutti gli angoli del triangolo E*eb* saranno finiti, ciascuno de' di lui lati sarà infinitesimo del primo ordine, poichè essendo finiti gli angoli del triangolo E*eb*, tutti i di lui lati sono dello stesso ordine, ma la sottesa E*e* è infinitesima del primo; tali adunque sono gli altri lati E*b*, *be* differenze delle abscisse, e delle ordinate. Lo stesso si dica se le ordinate B*a*, B*f* partiranno da un punto B.

22. Se nel calcolo oltre i differenziali del primo ordine si introdurranno ancora quei del secondo, del terzo ec., e s' abbia a trovare il rapporto, che passa tra quantità finite, qual rapporto è il limite dell' ultima ragione, che hanno tra loro i differenziali del primo ordine, in tal caso perchè i differenziali primi sono ridotti all' ultimo limite d' evanescenza, ben si vede, che in riguardo a loro svaniscono interamente, e vanno a zero i differenziali secondi, e molto più i terzi ec.: Onde qualora si tratta di trovar la ragione, che passa tra quantità finite, nelle proporzioni tra le quantità finite, e infinitesime, non possono aver luogo i differenziali secondi, e molto meno i terzi ec., che devonsi perciò annullare, e toglier dal calcolo. Ciò però non si potrà fare ne' differenziali secondi, qualora passando al zero le quantità finite, s' abbia a trovar la ragione, che passa tra i differenziali del primo ordine; nè si potranno ridurre a zero i differenziali terzi, ogniqualvolta annullandosi non solo le quantità finite, ma ancora gli infinitesimi del primo ordine, avrassi a trovar la ragione, che passa tra i differenziali del secondo ordine ec.

ARTICOLO III.

Del modo di differenziare.

23. PRendere il differenziale di una proposta quantità non è altro, che trovar l' espressione dell' elemento infinitamente piccolo, di cui intendesi essa aumentata, allor che cresce, o diminuita, qualora cala. Questa espressione si ottiene (giusta il num. 8.) con prefigere alla quantità variabile la lettera d, nel qual modo il differenziale di x è dx. Poichè la quantità costante non è soggetta ad aumento, o decremento, il differenziale della quantità costante è nullo; per lo che il differenziale di $a+y$ è dy: Qualora adunque si differenzia una formola, in cui entra qualche quantità affatto costante, dopo la differenziazione essa sparisce, nè più in tale formola si ritrova.

24.

24. Aumentandosi pertanto, o diminuendosi la variabile x della quantità infinitesima dx, l'espressione di questa variabile così accresciuta, o diminuita è $x \pm dx$ (il segno superiore vale se la variabile cresce, e l'inferiore se cala): Ora perchè con sottrarsi la variabile x da se stessa accresciuta, o diminuita del suo elemento infinitamente piccolo la differenza è $x \pm dx - x = \pm dx$, vale a dire lo stesso elemento, quindi per questa ragione le quantità infinitamente piccole con cui accresconsi, o si diminuiscono le variabili, si chiamano i loro differenziali, come ho già detto al num. 4.

25. Il differenziale dell'aggregato di più quantità è eguale all'aggregato delle loro differenze: Così [servendomi della lettera D per rappresentare il differenziale dell'aggregato di più quantità] sarà $D[x + ay - bz] = dx + ady - bdz$, e $D\left[ab - \frac{c^2x}{a} + \frac{e^3y}{g^2} - fz\right] = -\frac{c^2dx}{a} + \frac{e^3dy}{g^2} - fdz$: Dove si può osservare, che i fattori, o divisori costanti non recano alcuna alterazione alla differenziazione da farsi; e che qualora si voglia il differenziale di un qualunque complesso di quantità di una dimensione, basta prendere le differenze di ciascuna variabile coi loro rispettivi segni, e il complesso di queste differenze sarà la differenza della quantità proposta.

26. Passiamo adesso a vedere come si differenzj il prodotto di due, o più variabili, e primieramente si debba prendere il differenziale di xy: Ora egli è evidente, che per avere questo differenziale, basta prendere la differenza, che passa tra questo prodotto xy, e il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$; ma il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$ è $xy + xdy + ydx + dxdy$, dal quale sottraendosi il prodotto xy, rimane $xdy + ydx + dxdy$, in cui [giusta il num. 22.] il termine $dxdy$ svanisce, e va a zero; dunque il ricercato differenziale del prodotto xy è $xdy + ydx$. Così il differenziale del prodotto xyz non altro essendo, che la differenza, che passa tra il prodotto xyz, e il prodotto $\overline{x + dx} \times \overline{y + dy} \times \overline{z + dz} = xyz + yzdx + xzdy + xydz + zdxdy + ydxdz + xdydz + dxdydz$, ben si vede, che se da questo prodotto si sottrerà il prodotto xyz, indi si tolgano [pel num. 22.] i termini $zdxdy$, $ydxdz$, $xdydz$, $dxdydz$, resterà $yzdx + xzdy + xydz$, che è il ricercato differenziale del prodotto xyz. Collo stesso modo operando si trova, che il differenziale del prodotto $xyzu$ è $yzudx + xzudy + xyudz + xyzdu$.

27. Se ne deduce quindi la regola generale di differenziare il prodotto di più variabili, che è di prendere la somma de' prodotti, che nascono dal moltiplicarsi la differenza di ciascuna di tali quantità nel prodotto dell'altre, nel qual modo operando il differenziale di $\overline{a + x + y} \times \overline{b - z} \times \overline{x + u}$ si trova essere $\overline{dx + ay} \times \overline{b - u} \times \overline{x + u} - dx \times \overline{a + x + y} \times \overline{x + z} + \overline{dx + du} \times \overline{a + x + y} \times \overline{b - z} = 2bxdx - 2xzdx + budx - zudx + bxdy - xzdy + budy - zudy - axdz - x^2dz - xydz - audz - xudz - yudz + abdx + bydx - azdx - yzdx + abdu + bxdu + bydu - azdu - xzdu - yzdu$, del che si può assicurare con fare l'attuale prodotto indicato da $\overline{a + x + y} \times \overline{b - z} \times \overline{x + u}$, che è $abu + bx^2 + bxy - axz - x^2z - xyz + abu + bxu + byu - auz - xzu - yzu$, indi differenziare ciascun termine di questo prodotto.

28. Cerchiamo in terzo luogo qual esser debba il differenziale di una variabile elevata a una qualsisia potestà, e a fine d'andare con ordine vediamo qual sia il differenziale di x^2. Essendo che x^2 non è altro, che il prodotto di x in x, la regola data al num. 27. per differenziare il prodotto di due variabili serve istessamente per differenziare il quadrato di una variabile, e generalmente per differenziare una qualunque potestà di una variabile. Di fatto il differenziale di x^2 non è altro, che la differenza, che passa tra il quadrato x^2, e il quadrato $\overline{x+dx}^2$, cioè $x^2+2xdx+\overline{dx}^2-x^2=2xdx$ con sopprimere (giusta il num. 22.) il termine $\overline{dx}^2$; così il differenziale di x^3 è $=\overline{x+dx}^3-x^3=x^3+3x^2dx+3x\overline{dx}^2+\overline{dx}^3-x^1=3x^2dx$ con sopprimere (giusta il num. 22.) i termini $3x\overline{dx}^2$, $\overline{dx}^3$; il differenziale di x^4 è $\overline{x+dx}^4-x^4=x^4+4x^3dx+6x^2\overline{dx}^2+4x\overline{dx}^3+\overline{dx}^4-x^4=4x^3dx$ con sopprimere (pel num. citato) i termini $6x^2\overline{dx}^2$, $4x\overline{dx}^3$, $\overline{dx}^4$. Continuando a operare nello stesso modo si trova, che il differenziale di x^5 è $5x^4dx$, di x^6 è $6x^5dx$, di x^7 è $7x^6dx$ ec.

29. Onde la regola generale di differenziare una qualsisia potestà d'una variabile si è di prendere il prodotto di queste tre quantità, cioè dell'esponente della data potestà, della quantità proposta abbassata alla potestà prossima inferiore, e del differenziale della stessa quantità considerata elevata alla sola prima potestà: Che però in generale il differenziale di x^m è $mx^{m-1}dx$.

30. A questa regola si riporta la differenziazione delle variabili elevate alla prima potestà insegnata al num. 23., vale a dire il differenziale di x è $1x^{1-1}dx=1x^0dx=dx$.

31. Giusta la regola del num. 29. si differenzia la quantità $\overline{ab-gx+x^2}^2$ con fare $2\times\overline{ab-gx+x^2}\times\overline{-gdx+2xdx}=-2abgdx+4abxdx+2g^2xdx-6gx^2dx+4x^3dx$: Parimente il differenziale di $\overline{xy+ax}^3$ è $3\times\overline{xy+ax}^2\times\overline{xdy+ydx+adx}=3x^3y^2dy+6ax^3ydy+3a^2x^3dy+3y^3x^2dx+9ay^2x^2dx+9a^2yx^2dx+3a^3x^2dx$.

32. Sussiste la stessa regola del num. 29. ancorchè la potestà sia negativa, o pure sia imperfetta tanto positiva, che negativa. Vediamone gli esempj. Se la quantità da differenziarsi sarà x^{-m} si sarà $-mx^{-m-1}dx=-\frac{mdx}{x^{m+1}}$, in cui essendo per esempio $m=6$, sarà $-\frac{6dx}{x^7}$ il differenziale di x^{-6}; e il differenziale

le di $\frac{bx^{-m}}{a}$ è $-\frac{mbx^{-m-1}dx}{a} = -\frac{mbdx}{ax^{m+1}}$. Per differenziare la quantità $x^{\frac{m}{n}}$ si fa $\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$; e il differenziale di $x^{-\frac{m}{n}}$ è $-\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$:

Se $\frac{m}{n} = \frac{5}{3}$, onde $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{5}{3}}$, il suo differenziale è $\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}dx =$ $\frac{5}{3}x^{\frac{5-3}{3}}dx = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}dx$, e il differenziale di $x^{-\frac{m}{n}} = x^{-\frac{5}{3}}$ è $-$ $\frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}-1}dx = -\frac{5}{3}x^{\frac{-5-3}{3}}dx = -\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}dx = -\frac{\frac{5}{3}dx}{x^{\frac{8}{3}}}$. Si debba differenziare la quantità $\sqrt{ax-y^2+x^2}$, essa si riduca a modo di potestà così $\overline{ax-y^2+x^2}^{\frac{1}{2}}$, indi si operi nella maniera fin'ora praticata facendo

$$\frac{1}{2}\times\overline{ax-y^2+x^2}^{\frac{1}{2}-1}\times\overline{adx-2ydy+2xdx} =$$

$$\frac{1}{2}\times\overline{ax-y^2+x^2}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{adx-2ydy+2xdx} = \frac{1}{2}\times\frac{adx-2ydy+2xdx}{\overline{ax-y^2+x^2}^{\frac{1}{2}}} =$$

$\frac{adx-2ydy+2xdx}{2\sqrt{ax-y^2+x^2}}$. Isteſſamente operando si trova, che il differenziale di $\sqrt{ax-x^2+\sqrt{a^2y^2+y^4}}$, o sia di $\overline{ax-x^2+\overline{a^2y^2+y^4}^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}}$ è

$$\frac{1}{2}\times\overline{ax-x^2+\overline{a^2y^2+y^4}^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}-1}\times\overline{adx-2xdx+\frac{2a^2ydy+4y^3dy}{2\times\overline{a^2y^2+y^4}^{\frac{1}{2}}}} = adx$$

Digitized by Google

$$= \frac{adx - 2xdx + \dfrac{2a^2ydy + 4y^3dy}{2\sqrt{a^2y^2 + y^4}}}{2\sqrt{ax - x^2 + \sqrt{a^2y^2 + y^4}}}$$

. Parimente il differenziale di $\overline{ay + xy}^{\,-\frac{2}{3}}$

è $-\frac{2}{3} \times \overline{ay + xy}^{\,-\frac{2}{3}-1} \times \overline{ady + xdy + ydx} = -2 \times \dfrac{ady + xdy + ydx}{3\sqrt[3]{\overline{ay + xy}^{\,5}}}$.

33. Dovendosi differenziare la quantità $x^n y^m$ si prenderà [giusta il num. 26.] la somma dei due prodotti, che nascono dal moltiplicarsi un fattore nel differenziale dell' altro, con che il differenziale di $x^n y^m$ trovasi essere $ny^m x^{n-1}dx + mx^n y^{m-1}dy$; e il differenziale di $x^{-n} y^{-m}$ è $-ny^{-m} x^{-n-1}dx - mx^{-n} y^{-m-1}dy = -\dfrac{n\,dx}{y^m x^{n+1}} - \dfrac{m\,dy}{x^n y^{m+1}}$. Il differenziale di $\overline{x+y} \times \overline{u+z}^{\,2}$ è

$\overline{dx + dy} \times \overline{u+z}^{\,2} + \overline{x+y} \times 2 \times \overline{u+z} \times \overline{du + dz} = u^2dx + 2uzdx + z^2dx + u^2dy + 2uzdy + z^2dy + 2uxdu + 2uxdz + 2xzdu + 2xzdz + 2uydu + 2uydz + 2zydu + 2zydz$. E il differenziale di $\overline{a-x}\,\sqrt[3]{a+x}$, o sia di

$\overline{a-x} \times \overline{a+x}^{\,\frac{1}{3}}$ è $-dx \times \overline{a+x}^{\,\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \times \overline{a+x}^{\,\frac{1}{3}-1} \times dx \times \overline{a-x}$

$$= -dx\sqrt[3]{a+x} + \frac{dx \times \overline{a-x}}{3\sqrt[3]{\overline{a+x}^{\,2}}}.$$

34. Dalle cose dette fin'ora si raccoglie come debbasi operare per differenziare una frazione. La frazione da differenziarsi sia $\frac{x}{y}$. Poichè $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, il suo differenziale (pei num. 26., 32.) è $y^{-1}dx - xy^{-1-1}dy = \dfrac{dx}{y} - \dfrac{xdy}{y^2} = \dfrac{ydx - xdy}{y^2}$. Il differenziale di $xy \times \overline{2u + y}^{\,-1}$ è

xdy

$$\overline{xdy+ydx}\times\overline{zu+y}^{\,-1} - 1\times\overline{zu+y}^{\,-1-1}\times\overline{zdu+udz+dy}\times xy$$

$$= \frac{xdy+ydx}{zu+y} - \frac{\overline{zdu-udz-dy}}{\overline{zu+y}^{\,2}}\times xy =$$

$$\frac{\overline{xdy+ydx}\times\overline{zu+y}-\overline{zdu-udz-dy}}{\overline{zu+y}^{\,2}}\times xy.$$ Così il differenziale di $\frac{yz+x^2}{\sqrt{ax+x^2}} =$

$\overline{yz+x^2}\times\overline{ax+x^2}^{\,-\frac{1}{2}}$ è $\overline{ydz+zdy+2xdx}\times\overline{ax+x^2}^{\,-\frac{1}{2}}$

$$-\frac{1}{2}\times\overline{ax-x^2}^{\,-\frac{1}{2}-1}\times\overline{yz+x^2}\times\overline{adx+2xdx} = \frac{ydz+zdy+2xdx}{\sqrt{ax+x^2}}$$

$-\frac{1}{2}\times\frac{\overline{yz+x^2}\times\overline{adx+2xdx}}{\sqrt{\overline{ax+x^2}^{\,3}}}$; è il differenziale di $\frac{x\sqrt{ax+x^2}}{a\sqrt{ay-xy}}$

$= x\times\overline{ax+x^2}^{\,\frac{1}{2}}\times a^{-1}\times\overline{ay-xy}^{\,-\frac{1}{2}}$ è

$$dx\times\overline{ax+x^2}^{\,\frac{1}{2}}\times a^{-1}\times\overline{ay-xy}^{\,-\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{1}{2}\times\overline{ax+x^2}^{\,\frac{1}{2}-1}\times\overline{adx+2xdx}\times xa^{-1}\times\overline{ay-xy}^{\,-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}a^{-1}\times\overline{ay-xy}^{\,-\frac{1}{2}-1}\times\overline{ady-xdy-ydx}\times x\times\overline{ax+x^2}^{\,\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{dx\sqrt{ax+x^2}}{a\sqrt{ay-xy}} + \frac{x\times\overline{adx+2xdx}}{2a\sqrt{ax+x^2}\sqrt{ay-xy}} - \frac{x\times\overline{ady-xdy-ydx}\sqrt{ax+x^2}}{2a\sqrt{\overline{ay-xy}^{\,3}}} =$$

$$\frac{dx\times 2\times\overline{ax+x^2}\times\overline{ay-xy}+x\times\overline{adx+2xdx}\times\overline{ay-xy}-x\times\overline{ady-xdy-ydx}\times\overline{ax-x^2}}{2a\sqrt{ax+x^2}\times\sqrt{\overline{ay-xy}^{\,3}}}$$

$$= \frac{3a^2xydx+2ax^2ydx-5x^3ydx+2ax^3dy-a^2x^2dy-x^4dy}{2a\sqrt{ax+x^2}\times\sqrt{\overline{ay-xy}^{\,3}}}$$

La

La regola pertanto di differenziare una frazione ſi è ſottrarre dal prodotto del denominatore nel differenziale del numeratore il prodotto del numeratore nel differenziale del denominatore, indi dividere il tutto pel quadrato del denominatore.

35. Darò fine a queſto articolo con ridurre a una ſola regola la maniera di differenziare qualſiſia formola nella quale una ſola, o più variabili abbiano luogo. La regola è la ſeguente: Si ordini primieramente la formola per la variabile x, indi ſi moltiplichi ciaſcun di lei termine per l'eſponente, che in eſſo termine ha la variabile, e per $\frac{dx}{x}$: Fatto ciò ſi ordini la formola per la variabile y, poſcia ſi moltiplichi ciaſcun di lei termine per l'eſponente, che in eſſo termine ha la variabile y, e per $\frac{dy}{y}$. Lo ſteſſo ſi faccia riſpetto all' altra variabile, che vi poſſa eſſere, e ciò, che ne verrà ſarà il differenziale cercato: Veniamo agli eſempj. Si debba differenziare la quantità $a+x-2y$.

Queſta ordinata per x è				E ordinata per y è		
x	$-\ 2y$	$+\ a$		$-\ 2y$	$+\ x$	$+\ a$
$\frac{dx}{x}$	$\frac{0dx}{x}$	$\frac{0dx}{x}$	Moltiplicatori	$\frac{dy}{y}$	$\frac{0dy}{y}$	$\frac{0dy}{y}$
$\frac{xdx}{x}$			Prodotti	$-\frac{2ydy}{y}$		

Onde il cercato differenziale di $a+x-2y$ è $\frac{xdx}{x} - \frac{2ydy}{y} = dx - 2dy$.

Il differenziale di x^m è $\frac{mx^m dx}{x} = mx^{m-1}dx$. Per avere il differenziale di $+xy$, ſi deve prendere queſto prodotto due volte, nella prima delle quali deveſi egli intendere ordinato per x, e nella ſeconda per y, nel qual modo ſi avrà

	$+\ xy$	$+\ yx$
Moltiplicatori	$\frac{dx}{x}$	$\frac{dy}{y}$
Prodotti	$+\frac{xydx}{x}$	$+\frac{yxdy}{y}$

Che però il differenziale di xy è $\frac{xydx}{x} + \frac{yxdy}{y} = ydx + xdy$: Come pure il differenziale di $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ ſi ha con fare

Mol-

Digitized by Google

$$\begin{array}{lcc} & +\,xy^{-1} & +\,y^{-1}x \\ \text{Moltiplicatori} & \dfrac{dx}{x} & -\dfrac{dy}{y} \\ \text{Prodotto} & \dfrac{xy^{-1}dx}{x} & -\ \dfrac{y^{-1}xdy}{y} \end{array}$$

per lo che il differenziale di $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ è $\frac{xy^{-1}dx}{x} - \frac{y^{-1}xdy}{y} =$

$$y^{-1}dx - \frac{y^{-1}xdy}{y} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

36. Paſſiamo alle quantità compleſſe, in cui entrano prodotti, e poteſtà delle variabili. Si debba differenziare la formola $x^6 + 2x^3y^3 + y^6 - a^2x^4 + 2ab^2x^2y - b^4y^2 = 0$. Si operi come ſegue

Formola ordinata per x

$$x^6 - a^2x^4 + 2x^3y^3 + 2ab^2x^2y \begin{array}{l} +y^6 \\ -b^4y^2 \end{array}$$

Moltipl.

$$\frac{6dx}{x} \quad \frac{4dx}{x} \quad \frac{3dx}{x} \quad \frac{2dx}{x} \quad \frac{0dx}{x}$$

Prod.

$$\frac{6x^6dx}{x} - \frac{4a^2x^4dx}{x} + \frac{6x^3y^3dx}{x} + \frac{4ab^2x^2ydx}{x}$$

Formola ordinata per y

$$y^6 + 2x^3y^3 - b^4y^2 + 2ab^2x^2y \begin{array}{l} +x^6 \\ -a^2x^4 \end{array}$$

Moltipl.

$$\frac{6dy}{y} \quad \frac{3dy}{y} \quad \frac{2dy}{y} \quad \frac{dy}{y} \quad \frac{0dy}{y}$$

Prod.

$$\frac{6y^6dy}{y} + \frac{6x^3y^3dy}{y} - \frac{2b^4y^2dy}{y} + \frac{2ab^2x^2ydy}{y}$$

Il differenziale adunque della propoſta formola è $6x^5dx - 4a^2x^3dx + 6x^2y^3dx + 4ab^2xydx + 6y^5dy + 6x^3y^2dy - 2b^4ydy + 2ab^2x^2dy = 0$.

37. La regola ſuſſiſte ſempre, comunque vi ſiano più termini ſotto a un ſol vincolo, nel qual caſo ſi conſidera come un termine ſolo il compleſſo di tutti i termini, che ſono ſotto al vincolo, e il differenziale di queſto compleſſo ſi prende con moltiplicarlo nel prodotto del di lui eſponente nell' aggregato de' differenziali di ciaſcuno de' ſuoi termini (quai differenziali ſi devono prendere a norma del num. 35.) diviſo per lo ſteſſo compleſſo de' termini elevato alla ſola prima poteſtà: Nel qual modo il differenziale di $\overline{ax - xy + x^2}^{\,\pm m}$ (per rinchiudere in un ſolo eſempio tutti i caſi ho prefiſſo il ſegno $\pm$ all' eſponente m, che ſuppongo rappreſentare tanto un numero intero, che fratto) è

$$\pm m \times \frac{\overline{ax - xy + x^2}^{\,\pm m} \times \overline{adx - xdy - ydx + 2xdx}}{ax - xy + x^2} =$$

$$\pm m \times \overline{ax - xy + x^2}^{\,\pm m - 1} \times \overline{adx - xdy - ydx + 2xdx}.$$

38. Qui poi si offervi, che se sarà proposta da differenziarsi una formola, nella quale entri qualche complesso di termini esistenti sotto a un vincolo, si dovrà bensì procedere all' operazione ordinandola prima per x, e poi per y, ma però coll' avvertenza, che se in una delle formole ordinate o per x, o per y si farà entrare il detto complesso, non potrà egli aver luogo nell' altra: Come se si dovrà prendere il differenziale di $x^4 - ay^3 + \overline{ax + y^2}^{\,2} - b^2 \times \overline{x^4 - y^4}^{\,\frac{1}{2}} = 0$, si opererà come segue

Formola ordinata per x

	x^4	$-ay^3$	$+\ \overline{ax+y^2}^{\,2}$	$-\ b^2 \times \overline{x^4-y^4}^{\,\frac{1}{2}}$
Fattori	$\frac{4dx}{x}$	$\frac{0dx}{x}$	$2 \times \frac{\overline{adx+2ydy}}{ax+y^2}$	$\frac{1}{2}\, \frac{b^2 \times \overline{4x^3dx-4y^3dy}}{b^2 \times \overline{x^4-y^4}}$

Prod. $\frac{4x^4dx}{x} + \frac{2 \times \overline{ax+y^2}^{\,2} \times \overline{adx+2ydy}}{ax+y^2} - \frac{\frac{1}{2} b^2 \times \overline{x^4-y^4}^{\,\frac{1}{2}} \times \overline{4x^3dx-4y^3dy}}{x^4-y^4}$

cioè $4x^3dx + 2 \times \overline{ax+y^2} \times \overline{adx+2ydy} - \frac{1}{2} b^2 \times \frac{\overline{4x^3dx-4y^3dy}}{\overline{x^4-y^4}^{\,\frac{1}{2}}}$

Formola ordinata per y

	$-\ ay^3$	$+\ x^4$
Fattori	$\frac{3dy}{y}$	$\frac{0dy}{y}$
Prodotti	$-\frac{3ay^3dy}{y}$	$= -3ay^2dy$.

Il differenziale adunque della proposta formola $x^4 - ay^3 + \overline{ax+y^2}^{\,2} - b^2 \times \overline{x^4-y^4}^{\,\frac{1}{2}}$ è $4x^3dx - 3ay^2dy + 2 \times \overline{ax+y^2} \times \overline{adx+2ydy} - \frac{1}{2}\, \frac{b_2 \times \overline{4x^3dx-4y^3dy}}{\sqrt{x^4-y^4}}$.

39.

Digitized by Google

39. Per accertarsi dell' esattezza della regola basta osservare, che i differenziali per di lei mezzo ritrovati risultano gli stessi, che i ritrovati colle precedenti regole.

ARTICOLO IV.

Della maniera di differenziare le qualità logaritmiche, ed esponenziali.

40. Per determinare quale esser debba il differenziale di una data quantità logaritmica, per esempio lx, sia BQH (Fig. 10.) la logaritmica, nella quale le ordinate AB, CD, EF, GH rappresentino i numeri, fra' quali AB sia il protonumero, ed AC, AE, AG siano i corrispondenti loro logaritmi, cioè AC, di CD, AE di EF, AG di GH. Posto ciò sia $CD=x$, onde sarà $AC=lx$: Si prenda la porzione CP infinitamente piccola, dal punto P si alzi l' ordinata PQ, e dal punto D si conduca la DV parallela all' asse AG. Sarà adunque $CP=DV=dlx$, $VQ=PQ-CD=dx$. Ma se al punto D si condurrà la tangente RD, essa incontrerà il punto Q, e l' archetto infinitesimo DQ potendosi prendere (giusta il num. 21. 3.°) per una retta, saranno perciò simili i due triangoli RCD, DVQ, onde si avrà la seguente proporzione RC: CD :: DV : VQ, o sia in termini analitici (prendo la subtangente eguale al protonumero $=1$, nel qual caso giusta il num. CVI. Tomo IV. i logaritmi sono iperbolici.) $1 : x :: dlx : dx$, da cui si ricava $dlx = \frac{dx}{x}$, la quale equazione sussiste sempre qualunque sia il numero x, perchè (pel num. CII. Tomo IV.) nella logaritmica la sottotangente è costante. Si è adunque trovato il differenziale del dato logaritmo iperbolico di x, cioè di dlx, che è $\frac{dx}{x}$. Quindi se ne deduce la regola generale per differenziare qualsivoglia logaritmo iperbolico, ed è di prendere a norma delle cose dette nel precedente Art. III. il differenziale della proposta quantità variabile, indi dividere questo differenziale per la quantità stessa. E qui si osservi, che (giusta il num. 774. Tomo II.) essendo lo stesso il logaritmo di una quantità, comunque essa si prenda positiva, o negativa, perciò è $\frac{dx}{x}$ tanto $= dlx$, che $= dl-x$; di fatto $dl-x = \frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}$.

41. A norma adunque della regola data per differenziare una quantità logaritmica si trova, che $dl.\overline{x \pm a} = \frac{dx}{x \pm a}$; e $dl.\overline{a-x} = \frac{-dx}{a-x} = \frac{dx}{x-a}$, come costa dal mutare i segni tanto al numeratore, che al denominatore. Così

$dl\,\frac{1}{x}$ [$= dl x^{-1} =$ pel num. XCI. Tomo IV. $d - lx$] $= -\frac{dx}{x}$: Parimente $dl\frac{x}{y} =$ $\frac{ydx - xdy}{y^2 \times \frac{x}{y}} = \frac{y^2dx - yxdy}{xy^2} = \frac{y^2dx}{xy^2} - \frac{yxdy}{xy^2} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$, lo che potevasi trovare immediatamente con osservare, che $dl\frac{x}{y} = d.[lx - ly]$; e $dl\frac{xy}{zu} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} - \frac{du}{u}$: Per lo che per regola generale il differenziale del logaritmo di una frazione è il differenziale del logaritmo del numeratore meno il differenziale del logaritmo del denominatore.

42. Giusta le stesse regole $dlx^m = \frac{mx^{m-1}dx}{x^m}$; $dlx^{-m} = -\frac{mx^{-m-1}dx}{x^{-m}}$, cioè $\frac{mdx}{x}$ nel primo caso; e $-\frac{mdx}{x}$ nel secondo; e $dl.\overline{a^2+x^2}^{\,m} =$ $\frac{2mxdx}{a^2+x^2}$, poichè con fare $a^2+x^2=y$, si ha $\overline{a^2+x^2}^{\,m} = y^m$; $l.\overline{a^2+x^2}^{\,m} = l\,y^m$, e $dl.\overline{a^2+x^2}^{\,m} = dly^m = \frac{my^{m-1}dy}{y^m}$, in cui sostituendo i valori di y^{m-1}, dy, y^m, ne viene $\frac{m \times \overline{a^2+x^2}^{\,m-1}\,2xdx}{\overline{a^2+x^2}^{\,m}} = \frac{2mxdx}{a^2+x^2}$: E il differenziale di

$\frac{1}{\sqrt{-1}}l.\overline{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}}$ è $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, poichè si faccia $y =$ $\frac{1}{\sqrt{-1}}l.\overline{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}}$, indi si ponga $x\sqrt{-1} = z$, onde ne viene $y =$ $\frac{1}{\sqrt{-1}}l.\overline{z+\sqrt{1+z^2}}$. Ora il differenziale di $l.\overline{z+\sqrt{1+z^2}}$ è

$$\frac{dz + \frac{zdz}{\sqrt{1+z^2}}}{z + \sqrt{1+z^2}} = \frac{dz \times \overline{z+\sqrt{1+z^2}}}{\overline{z+\sqrt{1+z^2}} \times \sqrt{1+z^2}} = \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}. \text{ Dunque } dy = \frac{\frac{1}{\sqrt{-1}}dz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Ma

Ma $dz = dx\sqrt{-1}$, perchè si è fatto $x\sqrt{-1} = z$, dunque finalmente

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$ Istessamente $$dlx^{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}\, dx}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}dx}{x};$$

e $$d\,l.\,\overline{a^n + x^n}^{\frac{m}{n}} = \frac{mx^{n-1}dx}{a^n + x^n}.$$ Finalmente $$dl.\frac{x^m}{y^n} = \frac{my^n x^{m-1}dx - nx^m y^{n-1}dy}{y^{2n} \times \frac{x^m}{y^n}} = \frac{mdx}{x} - \frac{ndy}{y};$$ e $$dl.\frac{x^m y^{\frac{1}{n}}}{z^t u^{\frac{1}{r}}} = \frac{mdx}{x} + \frac{\frac{1}{n}dy}{y} - \frac{tdz}{z} - \frac{\frac{1}{r}du}{u}:$$ Così pure $$dl.\frac{x^m + y^n}{z^t} = \frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y} - \frac{2tdz}{z},$$ poichè $$dl\frac{x^m}{z^t} = \frac{mdx}{x} - \frac{tdz}{z},$$ e $$d.l\frac{y^n}{z^t} = \frac{ndy}{y} - \frac{tdz}{z}.$$

43. Stantechè [pel num. CIV. Tomo IV.] i logaritmi di due diversi sistemi stanno fra se in ragione diretta delle loro sottotangenti, egli è facile il passare dai logaritmi di un sistema ai logaritmi di un'altro: Come se, essendo dato il logaritmo iperbolico di un numero x, nel qual sistema la subtangente è $= 1$, si vorrà dello stesso numero x il logaritmo volgare, del qual sistema chiamo la subtangente $= s$, si farà $1 : s :: lx :$ al quarto, che trovasi essere $= slx$; onde basta moltiplicare il logaritmo iperbolico di x nella subtangente de' logaritmi volgari per avere il logaritmo volgare dello stesso numero x. Che però qualora si abbia il differenziale del logaritmo iperbolico del numero x, che è (pel num. 40.) $\frac{dx}{x}$, e si voglia il differenziale del logaritmo volgare dello stesso numero x, egli si otterrà facilmente con fare $\frac{sdx}{x}$ differenziale cercato. Dal che si raccoglie, che nel differenziare un logaritmo preso secondo il sistema di una proposta sottotangente $= s$, bisogna moltiplicare in s il differenziale trovato giusta le esposte regole, nel qual modo il differenziale di $l.\,\overline{a^2 + x^2}$ è $\frac{2sxdx}{a^2 + x^2}$.

44 Vediamo adesso come si differenzi questa quantità $[lx]^m$; e quì si osservi, che $[lx]^m = [lx]^{m-1} \times lx$, e che il differenziale di lx preso nel sistema della

la sottotangente $= s$ è $\frac{sdx}{x}$, poste le quali cose si scorge, che $d[lx]^m = m[lx]^{m-1} \frac{sdx}{x}$. Per accertarsene ancora più chiaramente si faccia $lx = y$, onde sarà $[lx]^m = y^m$, e $d[lx]^m = dy^m = my^{m-1}dy$, la quale mediante la sostituzione del valore di y^{m-1}, che è $[lx]^{m-1}$, e di dy, che è $\frac{sdx}{x}$, diventa $m[lx]^{m-1}.\frac{sdx}{x} = d[lx]^m$. Isteſſamente il differenziale di $\sqrt[t]{ax^n-(lx)^m}$, o sia di

$$\overline{ax^n-(lx)^m}^{\frac{1}{t}} \text{ è } \frac{1}{t} \times \overline{ax^n-(lx)^m}^{\frac{1}{t}-1} \times \overline{nax^{n-1}dx - m(lx)^{m-1}\frac{sdx}{x}}$$

$$= \frac{nax^{n-1}dx - m(lx)^{m-1} . \frac{sdx}{x}}{t\sqrt[t]{\overline{ax^n-(lx)^m}^{t-1}}}.$$ Il differenziale di $lm \times ln$ (le lettere m, n rappresentano qualsivoglia funzione di x) è $\frac{sdm}{m}ln + \frac{sdn}{n}lm$, e il differenziale di

$\frac{lm}{ln}$ è $\frac{\frac{sdm}{m}ln - \frac{sdn}{n}lm}{\overline{ln}^2}$. Il differenziale di $x^m lx$ è $mx^{m-1}dxlx + x^{m-1}sdx$. Il differenziale di $x^m(lx)^n$ è $mx^{m-1}dx(lx)^n + nx^{m-1}(lx)^{n-1} . sdx$.

45. Resta a vedersi come si debba operare per prendere il differenziale del logaritmo di un logaritmo. Sia proposto da differenziarsi $l.lx$. Se si supporrà $lx = y$, sarà $l.lx = ly$; ma $dly = \frac{sdy}{y}$ (pel num. 43.), e il differenziale dell'equazione $lx = y$ è $\frac{sdx}{x} = dy$; dunque se nella formola $\frac{sdy}{y}$ si sostituirà il valore di y, e di dy, si avrà $\frac{s^2dx}{x\,lx}$. Nello stesso modo si trova $dl.l.lx = \frac{s^3\,dx}{x \times lx \times llx}$;

ed

e $d\,l.l.l.lx = \frac{s^4\,dx}{x \times lx \times l.lx \times l.l.lx}$ ec. Parimente $(l.lx)^m = \frac{m\,[l.lx]^{m-1}\,s^2\,dx}{x \times lx}$.

46. Abbaſtanza abbiamo parlato della maniera di differenziare le quantità logaritmiche: Vediamo come debbaſi operare ſu le quantità eſponenziali. Col nome di quantità eſponenziali intendonſi quelle, che hanno per eſponente quantità variabili. La quantità elevata a un' eſponente variabile o può eſſere coſtante, come a^x, o pure può eſſere variabile, come y^z; lo che coſtituiſce due ſpezie di quantità eſponenziali. Le quantità eſponenziali di queſta ſeconda ſpecie ſi dividono in diverſi gradi. Del primo grado è y^z; del ſecondo grado è y^{z^x}; del terzo grado è $y^{z^{x^u}}$ ec. Cominciamo a dire come ſi differenzino le quantità eſponenziali della prima ſpezie. Debbaſi pertanto differenziare la quantità eſponenziale a^x: Si faccia $a^x = y$, indi ſi paſſi ai logaritmi facendo $xla = ly$. Si differenzi queſta equazione, e ne verrà $dx\,la = \frac{dy}{y}$, e però $ydxla = dy$: Ma ſi è fatto $y = a^x$, dunque ſoſtituendo nella precedente equazione queſto valore di y, ſi trova $a^x dxla = dy$ differenziale cercato. Nello ſteſſo modo ſi trova, che il differenziale di $\overline{a+b}^x$ è $\overline{a+b}^x\,dx\,l\,\overline{a+b}$; onde ſe ne deduce la ſeguente regola: Il differenziale di una quantità coſtante elevata a un'eſponente variabile è eguale al prodotto della ſteſſa quantità eſponenziale nel differenziale dell'eſponente, e nel logaritmo della quantità coſtante.

47. Ne' poc' anzi preſi differenziali ſi è aſſunta $=1$ la ſubtangente del ſiſtema logaritmico, che è quello de' logaritmi iperbolici; che però ſe il logaritmo iperbolico di a ſarà $=1$, cioè $la = 1$, ben ſi vede, che il differenziale della quantità eſponenziale a^x, che ſi è trovato eſſere $a^x dxla$, diverrà $a^x dx$. Se poi ſi vorrà un'altro ſiſtema di logaritmi, la di cui ſubtangente ſia $=s$, ſi troverà, che il differenziale di $xla = ly$ è $dxla = l\,\frac{sdy}{y}$, e però $dy = \frac{a^x dxla}{s}$. Poichè adunque ne' logaritmi volgari il logaritmo della baſe logaritmica è $=1$, cioè [con chiamare $=b$ la baſe logaritmica] $lb = 1$, ſe ſi dovrà differenziare queſta quantità eſponenziale b^x, ſi farà $\frac{b^x dx}{s}$ differenzaiale cercato. D'egual maniera operando ſi trova che il differenziale di $\left(\frac{m}{n}\right)^x$ è $\left(\frac{m}{n}\right)^x dx \times \overline{lm - ln}$, che diventa $\left(\frac{m}{n}\right)^x dx$ allorchè $l\,\frac{m}{n} = 1$.

48. Debbasi ora differenziare la quantità esponenziale y^z del primo grado della seconda specie: Si faccia $y^z = u$; si passi ai logaritmi così $z\,ly = lu$, poscia si differenzi questa equazione, con che si ottiene $dz\,ly + \frac{z\,dy}{y} = \frac{du}{u}$, vale a dire (con sostituire il valore di $u = y^z$) $dz\,ly + \frac{z\,dy}{y} = \frac{du}{y^z}$, e però $y^z dz\,ly + z y^{z-1} dy = du = dy^z$ differenziale cercato. Nello stesso modo operando si trova, che il differenziale di $a^x y^z$ è $y^z a^x dx\,la + a^x y^z dz\,ly + a^x z y^{z-1} dy$. Parimente il differenziale di $y^z u^x$ è $u^x y^z dz\,ly + u^x z y^{z-1} dy + y^z u^x dx\,lu + y^z x u^{x-1} du$.

49. Veniamo al modo di differenziare le quantità esponenziali del secondo grado, e sia proposto da differenziarsi y^{z^u}. Si faccia $y^{z^u} = x$, onde passando ai logaritmi si avrà $z^u ly = lx$. Si differenzi questa equazione, e si avrà $\frac{z^u dy}{y} + ly\,dz^u = \frac{dx}{x}$. Ma [pel precedente num. 48.] $d.z^u = z^u du\,l.z + u z^{u-1} dz$: Dunque sostituendo nel ritrovato differenziale il valore di $d.z^u$, e di $x = y^{z^u}$, si avrà finalmente $d.\,y^{z^u} = z^u y^{z^{u-1}} dy + z^u y^{z^u} du\,ly\,lz + u y^{z^u} z^{u-1} dz\,ly$, lo che dovevasi trovare.

50. Se sarà data da differenziarsi la quantità esponenziale a^{a^x}, si faccia $a^{a^x} = a^u = y$, e si differenzi [giusta il num. 46.] questa equazione $a^u = y$ così $a^u\, du\, la = dy$; ma perchè si è supposto $u = a^x$, è $du = a^x\, dx\, la$, dunque nell'equazione $a^u\, du\, la = dy$ sostituendosi questo valore di du, e il valore di a^u, che è a^{a^x}, si ha per ultimo $dy = a^{a^x} a^x\, dx\, la\, la$. Così il differenziale di $a^{a^{a^x}}$ è $a^{a^{a^x}} a^{a^x} a^x\, dx\, la\, la\, la$ ec.

51. Continuando col metodo pratico si troverà facilmente il differenziale delle quantità esponenziali $y^{x^{u^x}}$, $y^{z^{u^{x^t}}}$ ec.

52.

52. Quì poi si osservi, che se una quantità costante avrà un logaritmo per esponente, essa sarà una quantità algebraica, oppure un'esponenziale del primo grado: Sia per esempio la quantità esponenziale a^{qlx}. Si faccia $a^{qlx} = y$, indi si passi ai logaritmi, e si avrà $qlx\, la = ly$: che se di nuovo si ritornerà ai numeri, si troverà $x^{qla} = y$, che diventa $x^q = y$ ogniqualvolta sia $la = 1$.

ARTICOLO V.

Della maniera di differenziare le funzioni di circolo, e i seni, e coseni iperbolici.

53. Questa differenziazione può cadere o sopra gli archi, de' quali sia dato il seno, o il coseno, o la tangente, o la cotangente ec.; o pure può cadere su i seni, coseni, tangenti ec., de' quali sono dati gli archi. Cominciamo a vedere, come si trovi il differenziale di un'arco, del quale è dato il seno, o il coseno ec., e primieramente si debba ritrovare il differenziale di un'arco, di cui è dato il seno, che è Sen. x. Per esprimere l'arco di questo seno, faccio a. di Sen. x, siccome a. di Cos. x vuol dir arco del coseno x. Dovendosi pertanto differenziare a. di Sen. x, faccio $y = a$. di Sen. x, onde y rappresenterà l'arco, del quale è dato Sen. x, e in conseguenza sarà x il seno di quest'arco y, cioè $x =$ Sen. y. A fine di avere il differenziale di quest'arco y, si aumenti egli della quantità infinitamente piccola dy, facendo $y + dy$, nel qual caso ancora la x si aumenterà (giusta il num. 9.) del differenziale dx, e però l'equazione $x =$ Sen. y si cambierà nella seguente $x + dx =$ Sen. $\overline{y + dy}$: Ma (pel num. 31. (I.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III.) Sen. $\overline{y + dy} =$ Sen. $y \times$ Cos. $dy +$ Cos. $y \times$ Sen. dy (Faccio il raggio $r = 1$); dunque (poichè dy è l'espressione dell'arco evanescente, pel num. 21. 3°. il seno di quest'arco è eguale allo stesso arco, cioè Sen. $dy = dy$, e Cos $dy = 1$, pel num. 4. del calcolo de' triangoli piani Tomo III.) con fare in questa equazione Cos. $dy = 1$, Sen. $dy = dy$, essa si cambierà nella seguente Sen. $\overline{y + dy} =$ Sen. $y + dy$ Cos. y, o sia, con sostituire $x + dx$ in luogo di Sen. $\overline{y + dy}$, cui poc'anzi si è trovato eguale, $x + dx =$ Sen. $y + dy$ Cos. y. Ora si è veduto, che è $x =$ Sen. y, e però [pel num. 25. del calcolo de' triangoli piani Tomo III.] Cos. $y = \sqrt{1 - xx}$; dunque mediante la sostituzione di questi valori l'equazione $x + dx =$ Sen. $y + dy$ Cos. y diventa

$x + dx = x + dy\sqrt{1 - xx}$, e in conseguenza $dx = dy\sqrt{1 - xx}$, da cui si ricava $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$.

54. Quindi il differenziale di un'arco, di cui è dato il seno, è eguale al differenziale del seno diviso pel coseno.

55. Debbasi in secondo luogo ritrovare il differenziale di un'arco, del quale è dato il coseno, per esempio si debba ritrovare il differenziale di questa quantità

a. di Cos. x. che faccio eguale a y così $y = a.$ di Cos. x; onde sarà $x = \text{Cos.}\, y$. Si aumenti l'uno, e l'altro membro di questa equazione del suo differenziale, e si avrà $x + dx = \text{Cos.}\, \overline{y + dy}$. Riandando pertanto su le stesse traccie del precedente num. 53. si trova $dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$, poichè [pel num. 31. (III.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III.] $\text{Cos.}\, \overline{y + dy} = \text{Cos}\, y \times \text{Cos.}\, dy - \text{Sen}\, y \times \text{Sen.}\, dy = \text{Cos}\, y - dy\ \text{Sen.}\, y$, perchè $\text{Cos.}\, dy = 1$, e $\text{Sen.}\, dy = dy$, conseguentemente $x + dx = \text{Cos.}\, y - dy\ \text{Sen.}\, y$. Ora $\text{Cos.}\, y = x$, $\text{Sen.}\, y = \sqrt{1 - xx}$; dunque con fare queste sostituzioni ne viene $x + dx = x - dy \sqrt{1 - xx}$, vale a dire $dx = - dy \sqrt{1 - xx}$, e per ultimo $dy = - \dfrac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$.

56. Il differenziale pertanto dell'arco, di cui è dato il coseno, è eguale al differenziale negativo del coseno diviso pel seno.

57. In terzo luogo si debba ritrovare il differenziale di un' arco, del quale è data la tangente, per esempio si debba ritrovare il differenziale di questa quantità *a.* di Tang. x, che faccio eguale a y così $y = a.$ di Tang. x, per lo che sarà $x = \text{Tang.}\, y$. Si aumenti del suo differenziale l'uno, e l' altro membro di questa equazione facendo $x + dx = \text{Tang.}\, \overline{y + dy}$, in cui si sostituisca il valore di $\text{Tang.}\, \overline{y + dy}$ preso dal num. 37. (XIII.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III., lo che fatto si trova $x + dx = \dfrac{\text{Tang}\, y + \text{Tang.}\, dy}{1 - \text{Tang.}\, y \times \text{Tang.}\, dy}$, o sia [perchè $\text{Tang.}\, y = x$, e $\text{Tang.}\, dy = dy$] $x + dx = \dfrac{x + dy}{1 - xdy}$, che con togliere il denominatore diventa $x + dx - x^2dy - xdxdy = x + dy$, vale a dire $dx - x^2dy = dy$ [a motivo, che il termine $- xdxdy$ svanisce, e va a zero], da cui si ricava $dy = \dfrac{dx}{1 + xx}$ differenziale cercato.

58. Stante che $1 + xx$ è il quadrato della secante, il differenziale di un'arco, di cui è data la tangente, è eguale al differenziale della tangente diviso pel quadrato della secante.

59. Si debba in quarto luogo trovare il differenziale di un'arco, del quale è data la cotangente, per esempio si debba trovare il differenziale di questa quantità *a.* di Cot. x, che faccio eguale a y così $y = a.$ di Cot. x, onde sarà $x = \text{Cot.}\, y$.

Si

Si aumenti del suo differenziale l'uno, e l'altro membro di questa equazione, e si avrà $x + dx = \text{Cot.}\ \overline{y + dy}$. Ma (pel num. 37. del calcolo de' triangoli piani Tom. III.) $\text{Cot.}\ \overline{y + dy} = \frac{\text{Cos.}\,y \times \text{Cos.}\,dy - \text{Sen.}\,y \times \text{Sen.}\,dy}{\text{Sen.}\,y \times \text{Cos.}\,dy + \text{Cos.}\,y \times \text{Sen.}\,dy} =$

$\frac{\text{Cos}\,y - dy\,\text{Sen.}\,y}{\text{Sen.}\,y + dy\,\text{Cos.}\,y}$ [perchè $\text{Cos.}\,dy = 1$, e $\text{Sen.}\,dy = dy$], che riduco a questa

forma $= \dfrac{\frac{\text{Cos.}\,y}{\text{Sen.}\,y} - dy}{1 + dy\,\frac{\text{Cos.}\,y}{\text{Sen.}\,y}}$, la quale, a motivo che $\frac{\text{Cos.}\,y}{\text{Sen.}\,y} = \text{Cot.}\,y$ (pel num. 26. [IV.] del calcolo de' triangoli piani Tomo III.], diventa

$x + dx = \frac{\text{Cot.}\,y - dy}{1 + dy\,\text{Cot.}\,y}$, o sia, con sostituire x in luogo di $\text{Cot.}\,y$, cui si è trovata eguale, $x + dx = \frac{x - dy}{1 + xdy}$, e con togliere il denominatore $x + dx + x^2dy + xdxdy = x - dy$, vale a dire $dx + x^2dy = -dy$, (perchè il termine $xdxdy$ va a zero) da cui si ricava $dy = -\frac{dx}{1 + x^2}$.

60. E però il differenziale dell'arco, di cui è data la cotangente, è eguale al differenziale della cotangente preso negativamente, e diviso pel quadrato della cosecante.

61. Vediamo in quinto luogo come si trovi il differenziale di un'arco, del quale è data la secante: Si debba per esempio trovare il differenziale di questa quantità a. di $\text{Sec.}\,x$, che faccio eguale a y così $y = a.$ di $\text{Sec.}\,x$, onde sarà $x = \text{Sec.}\,y$. Si aumenti del suo differenziale l'uno, e l'altro membro di questa equazione, così che sia $x + dx = \text{Sec.}\ \overline{y + dy}$. Ora (pel num. 37. (XIX.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III.) $\text{Sec.}\ \overline{y + dy} =$

$\frac{\text{Sec.}\,y \times \text{Sec.}\,dy}{1 - \text{Tang.}\,y \times \text{Tang.}\,dy}$, dunque $x + dx = \frac{\text{Sec.}\,y \times \text{Sec.}\,dy}{1 - \text{Tang.}\,y \times \text{Tang.}\,dy}$: Ma essendo

$\text{Sec.}\,y = x$, si ha $\text{Tang.}\,y = \sqrt{x^2 - 1}$, di più $\text{Tang.}\,dy = dy$, e (pel num. 26.

(III.) luogo citato), Sec. $dy = \frac{\text{Tang. } dy}{\text{Sen. } dy} = 1$, dunque mediante la sostituzione

di questi valori la precedente equazione diventa $x + dx = \frac{x}{1 - dy\sqrt{x^2 - 1}}$,

e però $x + dx - xdy\sqrt{x^2 - 1} - dx\, dy\sqrt{x^2 - 1} = x$, vale a dire (a motivo che il termine $dxdy\sqrt{x^2 - 1}$ va a zero) $dx - xdy\sqrt{x^2 - 1} = 0$,

da cui si ricava $dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

62. Il differenziale pertanto di un'arco, di cui è data la secante, è eguale al differenziale della secante diviso pel prodotto della secante nella tangente.

63. Si debba in sesto luogo ritrovare il differenziale di un'arco, del quale è data la cosecante, cioè a dire si debba trovare il differenziale di questa quantità a. di Cosec. x, che faccio eguale a y, così $y = a$. di Cosec. x, e qui osservo, che (giusta il num. 26. (V.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III.) a. di Cosec. $x =$ a. di Sen. $\frac{1}{x}$, e però si ha $y = a$. di Sen. $\frac{1}{x}$, conseguentemente $\frac{1}{x} =$ Sen. y. Si accresca la variabile del suo differenziale nell'uno, e nell' altro membro di questa equazione, e si avrà $\frac{1}{x + dx} =$ Sen. $\overline{y + dy}$: Ma (pel n. 53.) Sen. $\overline{y + dy}$ $=$ Sen. $y + dy$ Cos. y, dunque $\frac{1}{x + dx} =$ Sen. $y + dy$ Cos. y. Ora Sen. $y =$ $\frac{1}{x}$, e Cos. $y = \sqrt{1 - \frac{1}{xx}} = \frac{\sqrt{xx - 1}}{x}$, dunque mediante la sostituzione di questi valori l' equazione $\frac{1}{x + dx} =$ Sen. $y + dy$ Cos. y diventa $\frac{1}{x + dx} = \frac{1}{x} +$ $dy\frac{\sqrt{xx - 1}}{x}$, vale a dire con togliere i denominatori $x = x + dy \times x\sqrt{xx - 1}$ $+ dxdy\sqrt{xx - 1} + dx$, che, a motivo del termine $dxdy\sqrt{xx - 1}$, che va a zero, risulta $dy \times x\sqrt{xx - 1} + dx = 0$, dalla quale si ricava

$dy =$

$dy = -\frac{dx}{x\sqrt{xx-1}}$, che è il differenziale cercato dell' arco y, di cui è data la coſecante x.

64 Il differenziale adunque di un' arco, del quale è data la coſecante, è eguale al differenziale negativo della coſecante diviſo pel prodotto della coſecante nella cotangente.

65. Vediamo per ultimo come ſi trovi il differenziale di un' arco, del quale è dato il ſeno verſo: Per eſempio ſi debba ritrovare il differenziale di queſta quantità a. di Sen. Verſo. x, che faccio eguale a y così $y = a$. di Sen. Verſo. x. Ma perchè queſt' arco ha per coſeno la differenza, che paſſa tra il raggio, e il ſeno verſo, che è $1-x$, però a. di Sen. Verſo. $x = a$. di Coſ. $\overline{1-x}$, e in conſeguenza $y = a$. di Coſ. $\overline{1-x}$; onde $1-x =$ Coſ. y. Si aumenti l' uno, e l' altro membro di queſta equazione del ſuo differenziale, e ne verrà $1-x-dx =$ Coſ. $\overline{y+dy}$. Ora (pel num. 55.) Coſ. $\overline{y+dy} =$ Coſ. $y - dy$ Sen. y, dunque $1-x-dx =$ Coſ. $y - dy$ Sen. y. Se pertanto ſi ſoſtituirà in queſta equazione $1-x$ in luogo di Coſ. y, cui ſi è trovato eguale, e $\sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-xx}$, che è eguale a Sen. y, eſſa diverrà $1-x-dx = 1-x-dy\sqrt{2x-xx}$, vale a dire $dx = dy\sqrt{2x-x^2}$, da cui ſi ricava $dy = \frac{dx}{\sqrt{2x-xx}}$, che è il differenziale cercato.

66. Quindi il differenziale di un' arco, del quale è dato il ſeno verſo, è eguale al differenziale del ſeno verſo diviſo pel ſeno dello ſteſſo arco.

67. Operando collo ſteſſo metodo ſi troverà il differenziale di un' arco moltiplice di un' arco, del quale è dato il ſeno: Per eſempio ſi debba ritrovare il differenziale di queſta quantità $m \times a$. di Sen. x, (la lettera m eſprime qualunque numero intero, o fratto), che faccio eguale a y così $y = m \times a$. di Sen. x, onde ne viene $x =$ Sen. $\frac{y}{m}$. Si faccia $\frac{y}{m} = z$, onde ſarà Sen. $\frac{y}{m} =$ Sen. z, ed $x =$ Sen. z. Si aumenti del ſuo differenziale l' uno, e l' altro membro di queſta equazione, e ſi avrà $x + dx =$ Sen. $\overline{z+dz}$: Ma [pel num. 53.] Sen. $\overline{z+dz} =$ Sen. $z + dz$ Coſ. z; dunque $x + dx =$ Sen $z + dz$ Coſ. z. Si ſoſtituiſca in queſta equazione il valore di Sen. z, che è $= x$, il valore di Coſ. z, che è $= \sqrt{1-xx}$, e il valore di dz, che ſi ottiene con differenziare

[giu-

Digitized by Google

[giusta il num. 34.] l'equazione $\frac{y}{m} = z$, e che è $\frac{mdy}{m^2} = \frac{dy}{m} = dz$, e con ciò essa diverrà $x + dx = x + \frac{dy}{m}\sqrt{1 - xx}$, cioè a dire $dx = \frac{dy}{m}\sqrt{1 - xx}$, dalla quale si ricava $dy = \frac{mdx}{\sqrt{1 - xx}}$ differenziale cercato.

68. Eguale operazione ci esibisce $dy = -\frac{mdx}{\sqrt{1-xx}}$ pel differenziale di questa equazione $y = m \times a.$ di Cos. x. Pel differenziale dell' equazione $y = m \times a.$ di Tang. x dà $dy = \frac{mdx}{x^2+1}$. Pel differenziale dell' equazione $y = m \times a.$ di Cot. x somministra $dy = \frac{-mdx}{xx+1}$. Pel differenziale dell' equazione $y = m \times a.$ di Sec. x dà $dy = \frac{mdx}{x\sqrt{xx-1}}$; e $dy = \frac{-mdx}{x\sqrt{xx-1}}$, pel differenziale dell' equazione $y = m \times a.$ di Cosec. x; finalmente $dy = \frac{mdx}{\sqrt{2x - xx}}$ pel differenziale dell' equazione $y = m \times a.$ di Sen. Ver. x.

69. Se si consulterà l'Articolo IV. Capo III. del Tomo IV., e la parte I. del calcolo de' triangoli piani Tomo III., si vedrà qual altra espressione algebraica si possa dare alle seguenti $y = m \times a.$ di Sen. x; $y = m \times a.$ di Cos. x; $y = m \times a.$ di Tang. x ec. Se per esempio si supporrà $m = 2$, sarà (pel num. 33. (V.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III.) $y = m \times a.$ di Sen. x riducibile alla seguente espressione $y = a.$ di Sen. $2x\sqrt{1 - xx}$, e [pel [VI.] luogo citato.] $y = m \times a.$ di Cos. x si riduce a $y = a.$ di Cos. $\overline{x^2 - [1 - xx]}$: Parimente [giusta il num. 37. [XIV.] luogo citato] l'equazione $y = m \times a.$ di Tang. x acquista questa espressione $y = a.$ di Tang. $\frac{2x}{1 - xx}$, e $y = m \times a.$ di Cot. x diventa [pel XVIII.]

$y = a$

Digitized by Google

$y = a$. di Cot. $\frac{x^2 - 1}{2x}$. Così $y = m \times a$. di Sec. x si trova essere (pel num. citato.) $y = a$. di Sec. $\frac{x^2}{2 - x^2}$; e finalmente $y = m \times a$. di [illegible] XXIII.) in $y = a$. di Cosec. $\frac{1}{2}\,x$ ec.

70. Se m sarà un numero fratto, in tal caso per ritrovare le altre espressioni di $y = m \times a$. di Sen. x; $y = m \times a$. di Cos. x, ec. bisognerà servirsi delle formole indicate al num. 527. Tomo IV. Vediamone un solo esempio. Sia dato $y = \frac{1}{2}\,.\,a$. di Tang. x, e si voglia un' altra espressione di questa equazione. Dall' equazione data si ricava $2y = a$. di Tang. x, e però $x = \text{Tang.}\,2y$ Dal num. 525. Tomo IV. si prenda la formola Tang. $2m = \frac{2\,\text{Tang.}\,m}{1 - \overline{\text{Tang.}\,m}^2}$, la quale mediante la sostituzione di y in luogo di m si cambia nella seguente Tang. $2y = \frac{2\,\text{Tang.}\,y}{1 - \overline{\text{Tang.}\,y}^2}$, che con sostituire x in luogo di Tang. $2y$, diventa $x = \frac{2\,\text{Tang.}\,y.}{1 - \overline{\text{Tang.}\,y}^2}$. Si tolga il denominatore, e si avrà $x - x\,\overline{\text{Tang.}\,y}^2 = 2\,\text{Tang.}\,y$, che ordino così $\overline{\text{Tang.}\,y}^2 + \frac{2}{x}\,\text{Tang.}\,y = 1$. Risolvo questa equazione, e mi viene Tang. $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$. Ma y esprime l' arco, dunque $y = a$. di Tang. $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \frac{1}{2}\,a$. di Tang. x. Ora (pel num. 69.) il differenziale di $y = \frac{1}{2}\,a$, di Tang. x è $\frac{dx}{2 \times \overline{xx + 1}}$, dunque tale deve esser pure il differenziale di $y = a$. di Tang. $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$. Vediamolo adunque, e ciò servirà di prova all' esattezza della nuova trovata espressione. Si ponga pertanto $\sqrt{x^2}$

$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=z$, onde farà $y=a$. di Tang. z, e in confeguenza $z=$ Tang. y. e: aumenti del fuo differenziale [illegible] di quefta equazione così $z+dz=$ Tang. $\overline{y+dy}$. Ora Tang. $\overline{y+dy}=\frac{\text{Tang. } y+\text{Tang. } dy}{1-\text{Tang. } y \times \text{Tang. } dy}$, o fia [con foftituire z in luogo di Tang. y, e dy in luogo di Tang. dy], $=\frac{z+dy}{1-zdy}$; dunque $z+dz=\frac{z+dy}{1-zdy}$, da cui fi ottiene $dy=\frac{dz}{z^2+1}$. Ora quì devefi foftituire il valore di z^2, e di dz. Con differenziare pertanto l' equazione $z=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ fi ha il valore di dz, che è (pel num. 34.)

$$=\frac{\frac{x^2 dx}{\sqrt{xx+1}}-dx\times\sqrt{\sqrt{xx+1}-1}}{x^2}=\frac{dx\times\sqrt{xx+1}-1}{xx\sqrt{xx+1}}$$

; il valore poi di z^2 prefo dalla fteffa equazione $z=\frac{\sqrt{xx+1}-1}{x}$ è $\frac{x^2-2\sqrt{xx+1}+2}{xx}$. Se pertanto fi foftituiranno quefti valori di z^2, e di dz nell'equazione $dy=\frac{dz}{z^2+1}$, effa fi cambierà nella feguente

$$dy=\frac{\frac{dx\times\sqrt{xx+1}-1}{xx\sqrt{xx+1}}}{\frac{x^2-2\sqrt{xx+1}+2+1}{x^2}}=\frac{dx\times\sqrt{xx+1}-1}{2\times\overline{x^2+1}\times\sqrt{xx+1}-1}=$$

$\frac{dx}{2\times\overline{x^2+1}}$, che corrifponde appunto al metodo del num. 69.

71. Dovendofi prendere il differenziale di quefta equazione $y=b$ a. di Sen. $\frac{1-xx}{1+xx}$, fi fa-

si farà a norma del num. 47. (suppongo $l.b=1$) $dy=b$ $a.$ di Sen. $\frac{1-xx}{1+xx}$ $\chi \overline{-\frac{2dx}{1+xx}}$;

poichè il differenziale di questa quantità $a.$ di Sen. $\frac{1-xx}{1+xx}$ è $-\frac{2dx}{1+xx}$, come costa con fare $\frac{1-xx}{1+xx}=z$, indi prendere l'equazione $y=a.$ di Sen. z, il di cui differenziale (pel num. 53.) è $dy=\frac{dz}{\sqrt{1-zz}}$. In questa equazione si sostituisca il valore di dz preso dall' equazione $\frac{1-xx}{1+xx}=z$, che è

$$dz=-\frac{2xdx\chi\overline{1+xx}-2xdx\chi\overline{1-xx}}{\overline{1+xx}^2}=-\frac{4xdx}{\overline{1+xx}^2}\text{, e il va-}$$

lore di zz, che si ricava dalla stessa equazione $z=\frac{1-xx}{1+xx}$, facendo

$$\sqrt{\frac{1-1+2x^2-x^4}{1+2x^2+x^4}}=\sqrt{\frac{4x^2}{\overline{1+xx}^2}}=\frac{2x}{1+xx}\text{, onde ne viene}$$

$$dy=\frac{dz}{\sqrt{1-zz}}=-\frac{\frac{4xdx}{\overline{1+xx}^2}}{\frac{2x}{1+xx}}=-\frac{2dx}{1+xx}.$$

72. L' operazione non involverà maggiore difficoltà, qualora nell' espressione degli archi da differenziarsi entreranno due variabili. Debbasi per esempio differenziare questa equazione $y=a.$ di Sen. $\frac{x}{z}$. Si faccia $\frac{x}{z}=u$, onde sarà $y=a.$ di Sen. u, il di cui differenziale (pel num. 53.) è $dy=\frac{du}{\sqrt{1-uu}}$; ma du

preso dal differenziarsi l'equazione $\frac{x}{z} = u$ è $= \frac{zdx - xdz}{z^2}$, ed $uu = \frac{x^2}{z^2}$,

dunque sostituendosi questi valori di du, e di uu nell' equazione $dy = \frac{du}{\sqrt{1 - uu}}$,

si avrà $dy = \frac{\frac{zdx - xdz}{z^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{z^2}}} = \frac{zdx - xdz}{z\sqrt{z^2 - x^2}}$. Parimente dovendosi trovare il differenziale di questa equazione $y = a$. di Cos. $\frac{\sqrt{1 - x}}{z}$, si faccia $\frac{\sqrt{1 - x}}{z} = u$, con che sarà $y = a$. di Cos. u, il di cui differenziale (pel num. 55.) è $dy = \frac{-du}{\sqrt{1 - uu}}$. Ora il valore di du preso dall' equazione $\frac{\sqrt{1 - x}}{z} = u$ è $\frac{-zdx - 2dz + 2xdz}{2z^2\sqrt{1 - x}}$, e il valore di u^2 è $\frac{1 - x}{z^2}$; che però sostituendosi questi valori di u^2, e di du nell' equazione $dy = \frac{-du}{\sqrt{1 - uu}}$, si avrà per ultimo

$dy = \frac{zdx + 2dz - 2xdz}{2z\sqrt{1 - x} \times \sqrt{z^2 + x - 1}}$ differenziale cercato.

73. Dopo avere veduto come si trovi il differenziale di un' arco, del quale è dato o il seno, o il coseno, o la tangente ec., passiamo a vedere come debbasi operare per trovare i differenziali de' seni, coseni, tangenti ec. delle quali funzioni sono dati gli archi. E primieramente essendo dato l'arco x di circolo, si debba ritrovare il differenziale di Sen. x, che faccio eguale a y così $y =$ Sen. x. Si aumenti del suo differenziale l' uno, e l' altro membro di questa equazione facendo $y + dy =$ Sen. $\overline{x + dx}$, che con porre Sen. x in luogo di y diventa Sen. $x + dy =$ Sen. $\overline{x + dx}$, e però $dy =$ Sen. $\overline{x + dx}$ — Sen. x. Ma (pel num. 53.) Sen. $\overline{x + dx} =$ Sen. $x + dx$ Cos. x. Dunque sostituendosi questo valore nella precedente equazione, essa diverrà $dy = dx$ Cos. x differenziale cercato.

74.

74. Il differenziale pertanto del Seno di un qualsivoglia arco dato è eguale al prodotto del differenziale dell'arco moltiplicato nel coseno dello stesso arco.

75. Dato in secondo luogo l'arco x, si debba trovare il differenziale di Cos. x. Si eguagli egli a y facendo $y = \text{Cos.}\, x$, poscia si aumenti del suo differenziale l'uno, e l'altro membro di questa equazione così $y + dy = \text{Cos.}\, \overline{x + d\,x}$, che con sostituire Cos. x in luogo di y, diventa Cos. $x + dy = \text{Cos.}\, \overline{x + d\,x}$, e però $dy = \text{Cos.}\, \overline{x + dx} - \text{Cos.}\, x$. Ma (pel num. 55.) $\text{Cos.}\, \overline{x + d\,x}$ è $= \text{Cos.}\, x - dx\, \text{Sen.}\, x$. Se pertanto si sostituirà questo valore nella precedente equazione, si avrà $dy = -dx\, \text{Sen.}\, x$ differenziale cercato.

76. Adunque il differenziale del coseno di un qualunque arco dato è eguale al prodotto del differenziale negativo di quest'arco nel seno dello stesso arco.

77. Dato in terzo luogo l'arco x, si debba ritrovare il differenziale di Tang. x. Si faccia $y = \text{Tang.}\, x$, indi si aumenti del suo differenziale l'uno, e l'altro membro di questa equazione così $y + dy = \text{Tang.}\, \overline{x + d\,x}$, in cui sostituendo Tang. x in luogo di y, si avrà Tang. $x + dy = \text{Tang.}\, \overline{x + d\,x}$, e però $dy = \text{Tang.}\, \overline{x + d\,x} - \text{Tang.}\, x$. Ora (pel num. 57.) $\text{Tang.}\, \overline{x + d\,x} = \dfrac{\text{Tang.}\, x + d\,x}{1 - dx\, \text{Tang.}\, x}$; quindi mediante la sostituzione di questo valore la precedente equazione diventa $dy = \dfrac{\text{Tang.}\, x + d\,x}{1 - dx\, \text{Tang.}\, x} - \text{Tang.}\, x = \dfrac{dx \times \overline{1 + \overline{\text{Tang}\; x}^2}}{1 - dx\, \text{Tang.}\, x} = dx \times \overline{1 + \overline{\text{Tang.}\, x}^2}$; perchè $1 - dx\,\text{Tang.}\, x = 1$. Che se si sostituirà $\overline{\text{Sec.}\, x}^2$ in luogo di $1 + \overline{\text{Tang.}\; x}^2$, cui è eguale a norma del num. 25. del calcolo de' triangoli piani Tomo III., si avrà $dy = dx\, \overline{\text{Sec.}\, x}^2$ differenziale cercato: O pure perchè (pel num. 26. (II.) luogo citato.) $\text{Sec.}\, x = \dfrac{1}{\text{Cos.}\, x}$, e $\overline{\text{Sec.}\, x}^2 = \dfrac{1}{\overline{\text{Cos.}\, x}^2}$, sarà $dy = \dfrac{dx}{\overline{\text{Cos.}\, x}^2}$.

78. Onde il differenziale della tangente di un' arco dato è eguale al differenziale dell'arco moltiplicato nel quadrato della di lui secante; ovvero è eguale al differenziale dell'arco diviso pel quadrato del coseno.

79. Sia dato in quarto luogo l'arco x, e si debba ritrovare il differenziale di Cot. x. Si ponga $y = \text{Cot.}\, x$, e si aumenti del suo differenziale l'uno, e l'altro mem-

Digitized by Google

membro di queſta equazione, facendo $y+dy=\text{Cot.}\ \overline{x+dx}$. Si ſoſtituiſca Cot x in luogo di y, e ſi avrà Cot. $x+dy=\text{Cot.}\ \overline{x+dx}$, conſeguentemente $dy=$ Cot. $\overline{x+dx}$ — Cot. x. Ora (pel num. 26. (IV.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III.) Cot. $x=\frac{\text{Coſ.}\ x}{\text{Sen.}\ x}$, e (pel num. 37. luogo citato.) Cot. $\overline{x+dx}$

$$=\frac{\text{Coſ.}\ x \times \text{Coſ.}\ dx-\text{Sen.}\ x \times \text{Sen.}\ dx}{\text{Sen.}\ x \times \text{Coſ.}\ dx+\text{Coſ.}\ x \times \text{Sen.}\ dx}=\frac{\text{Coſ.}\ x-dx\,\text{Sen.}\ x}{\text{Sen.}\ x+dx\,\text{Coſ.}\ x}$$

, perchè Coſ. $dx=1$, e Sen. $dx=dx$. Dunque ſoſtituendo queſti valori nell' equazione $dy=\text{Cot.}\ \overline{x+dx}-\text{Cot.}\ x$, ſi otterrà $dy=\frac{\text{Coſ.}\ x-dx\,\text{Sen.}\ x}{\text{Sen.}\ x+dx\,\text{Coſ.}\ x}-\frac{\text{Coſ.}\ x}{\text{Sen.}\ x}$

$$=\frac{\text{Sen.}\ x\,\text{Coſ.}\ x-dx\,\overline{\text{Sen.}\ x}^2-\text{Sen.}\ x\,\text{Coſ.}\ x-dx\,\overline{\text{Coſ.}\ x}^2}{\overline{\text{Sen.}\ x}^2+dx\,\text{Sen.}\ x\,\text{Coſ.}\ x}=$$

$$-\frac{dx\times\overline{\overline{\text{Sen.}\ x}^2+\overline{\text{Coſ.}\ x}^2}}{\overline{\text{Sen.}\ x}^2+dx\,\text{Sen.}\ x\,\text{Coſ.}\ x}=\frac{-dx}{\overline{\text{Sen.}\ x}^2}$$

, perchè $\overline{\text{Sen.}\ x}^2+\overline{\text{Coſ.}\ x}^2=1$, e il termine dx Sen. x Coſ. x va a zero.

80. Quindi il differenziale della cotangente di un'arco dato è eguale al differenziale negativo di queſt' arco diviſo pel quadrato del ſeno del medeſimo arco.

81. In quinto luogo ſia propoſto l'arco x, e ſi debba trovare il differenziale di Sec. x. Si ponga $y=$ Sec. x, e ſi aumenti del ſuo differenziale l'uno, e l'altro membro di queſta equazione facendo $y+dy=\text{Sec.}\ \overline{x+dx}$, o ſia (con ſoſtituire Sec. x in luogo di y) Sec. $x+dy=\text{Sec.}\ \overline{x+dx}$, e però $dy=$ Sec. $\overline{x+dx}$ — Sec. x. Ora [pel num. 37. [XIX.] del calcolo de' triangoli piani Tomo III.] Sec. $\overline{x+dx}=\frac{\text{Sec.}\ x\times\text{Sec.}\ dx}{1-\text{Tang.}\ x\ \text{Tang.}\ dx}$ = (a motivo, che Sec. $dx=1$, e Tang. $dx=dx$) $\frac{\text{Sec.}\ x}{1-dx\ \text{Tang.}\ x}$. Dunque ſoſtituendo queſto valore nella precedente equazione, ſi avrà $dy=\frac{\text{Sec.}\ x}{1-dx\,\text{Tang.}\ x}-\text{Sec.}\ x$

=

Digitized by Google

$= \frac{\text{Sec.}\, x - \text{Sec}\, x + dx\, \text{Tang.}\, x\, \text{Sec.}\, x}{1 - dx\, \text{Tang.}\, x} = dx\, \text{Tang.} x\, \text{Sec.} x$, poichè $1 - dx\, \text{Tang.} x = 1$.

Il differenziale pertanto cercato è $dy = dx\, \text{Tang}\, x\, \text{Sec.}\, x$, o pure è $dy = \frac{dx\, \text{Sen.}\, x}{\overline{\text{Cof.}\, x}^2}$ con foſtituire il valore di Tang. $x = \frac{\text{Sen.}\, x}{\text{Cof.}\, x}$ (pel num. 26.(I.) luogo citato), e il valore di Sec. $x = \frac{1}{\text{Cof.}\, x}$ (per lo ſteſſo num. 26. (II.).)

82. Che però il differenziale della Secante di un' arco dato è eguale al prodotto del differenziale dell' arco, della tangente, e della ſecante dell' arco medeſimo, o pure è eguale al prodotto del differenziale dell' arco nel Seno diviſo pel quadrato del coſeno del medeſimo arco.

83. In ſeſto luogo dato l' arco x ſi debba trovare il differenziale di Coſec. x, che faccio $= y$; onde ho $y = \text{Cofec.}\, x$, e perchè pel num. 26. (IX.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III.) Coſec. $x = \text{Sec.}\, x \times \text{Cot.}\, x$, con ſoſtituire queſto valore ne viene $y = \text{Sec.}\, x \times \text{Cot.} x$, il di cui differenziale è $dy = \text{Cot.}\, x \times d.\, \text{Sec.}\, x + \text{Sec.} x \times d.\text{Cot.}\, x$. Ma (pel num. 81.) $d.\, \text{Sec.} x = \frac{dx\, \text{Sen.}\, x}{\overline{\text{Cof.}\, x}^2}$, e (pel num. 79) $d\, \text{Cot.}\, x = \frac{-dx}{\overline{\text{Sen.}\, x}^2}$, e in oltre (pel num. 26. (IV.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III.) Cot. $x = \frac{\text{Cof.}\, x}{\text{Sen.}\, x}$, e [pel num. ſteſſo 26. (II.)] Sec. $x = \frac{1}{\text{Cof.}\, x}$; quindi ſoſtituendo queſti valori nell' equazione $dy = \text{Cot.}\, x \times d\text{Sec.} x + \text{Sec.}\, x \times d\text{Cot.}\, x$, eſſa ſi cambierà nella ſeguente $dy =$

$$\frac{\text{Cof.}\, x}{\text{Sen.}\, x} \times \frac{dx\, \text{Sen}\, x}{\overline{\text{Cof.}\, x}^2} - \frac{1}{\text{Cof.}\, x} \times \frac{dx}{\overline{\text{Sen.}\, x}^2} = \frac{dx}{\text{Cof.}\, x} - \frac{dx}{\text{Cof.}\, x\, \overline{\text{Sen.}\, x}^2} =$$

$$- \frac{dx \times \overline{1 - \overline{\text{Sen.}\, x}^2}}{\text{Cof.}\, x \times \overline{\text{Sen.}\, x}^2}$$ = (con ſoſtituire $\overline{\text{Cof.}\, x}^2$ in luogo di $1 - \overline{\text{Sen.}\, x}^2$) $- \frac{dx\, \text{Cof.}\, x}{\overline{\text{Sen.}\, x}^2}$, che è il differenziale cercato; o pure $-dx\text{Cot.} x\, \text{Cofec.} x$ con ſoſtituire primieramente $\text{Sen.} x \times \text{Cot.} x$ in luogo di Coſ. x (giuſta il

il num. 26. (IV.) luogo citato), con che si ha $-\frac{dx \text{ Cof. } x}{\overline{\text{Sen. } x}^2} =$

$-\frac{dx \text{ Sen. } x \text{ Cot. } x}{\overline{\text{Sen. } x}^2} = -\frac{dx \text{ Cot. } x}{\text{Sen. } x}$, indi con sostituire in quest'ultima espressione il valore di Sen. x, che è $\frac{1}{\text{Cosec. } x}$ (pel num. stesso 26. [V.]), dal che risulta $- dx$ Cot. x. Cosec. x.

84. Il differenziale pertanto della cosecante di un'arco dato è eguale al prodotto del differenziale negativo dell'arco dato nel suo coseno diviso pel quadrato del seno dello stesso arco; ovvero è eguale al prodotto del differenziale negativo dell'arco nella di lui cotangente, e cosecante.

85 Resta per ultimo a vedersi come si trovi il differenziale del seno verso di un'arco dato x. Si debba pertanto differenziare questa equazione $y =$ Sen. Ver. x: Poichè Sen. Ver. $x = 1 -$ Cof. x, e il differenziale di Cof. x è (pel num. 75.) $- dx$ Sen. x, dunque il differenziale di Sen. Ver. x è $= dx$ Sen. x, onde si ha $dy = dx$ Sen. x.

86. Adunque il differenziale del seno verso di un'arco dato è eguale al prodotto del differenziale dell'arco nel seno dello stesso arco.

87. D'egual maniera si opera in caso, che la quantità da differenziarsi sia il prodotto, o il quoziente di seni, coseni, tangenti ec. d'archi dati. Vediamone l'esempio: Si debba differenziare questa equazione $y =$ Tang. $x \times$ Cof x. Si faccia $dy =$ Cof. $x \times d$ Tang. $x +$ Tang. $x \times d$ Cof. x: Ma (pel num. 77.) d Tang. $x = \frac{dx}{\overline{\text{Cof. } x}^2}$, e (pel num. 75.) d Cof. $x = - dx$ Sen. x, quindi sostituendosi questi valori nella precedente equazione, ne viene $dy = \frac{dx}{\text{Cof. } x} - dx \text{ Sen } x \text{ Tang. } x$, che (con sostituirsi giusta il num. 26. (I) del calcolo de' triangoli piani Tomo III. il valore di Tang. x, che è $= \frac{\text{Sen. } x}{\text{Cof. } x}$) diventa $\frac{dx}{\text{Cof. } x} - \frac{dx \, \overline{\text{Sen } x}^2}{\text{Cof. } x} =$

$\frac{dx \times \overline{1 - \overline{\text{Sen. } x}^2}}{\text{Cof. } x} = dx$ Cof. x mediante il sostituire $\overline{\text{Cof. } x}^2$ in luogo di $1 - \overline{\text{Sen. } x}^2$. Il differenziale pertanto di $y =$ Tang. $x \times$ Cof. x è $dy = dx$ Cof. x. Di fatti Tang. $x \times$ Cof. x è $=$ Sen. x [giusta il num. citato 26. (I.), e pel num. 73.] il differenziale di Sen. x è dx Cof. x.

88. Istessamente pure si opererà, qualora la quantità da differenziarsi rinchiuderà diverse variabili. Si debba a cagion d'esempio differenziare questa equazione

$y =$

$y = \frac{\text{Cof. } x}{\text{Sen. } z}$. Si faccia $dy = \frac{\text{Sen } z \times d\text{Cof.} x - \text{Cof.} x \times d.\text{Sen.} z}{\overline{\text{Sen. } z}^2}$. Ma (pel num. 75.)

$d.\text{Cof. } x = -dx \text{ Sen. } x$, e (pel num. 73.) $d \text{ Sen. } z = dx \text{ Cof. } z$; che però con fostituire quefti valori nella precedente equazione, fi avrà

$$dy = -\frac{dx \text{ Sen. } x \text{ Sen. } z - dz \text{ Cof. } z \text{ Cof. } x}{\overline{\text{Sen. } z}^2}.$$

89. Le regole efpofte fervono del pari per differenziare le funzioni d' archi dati elevate a qualfivoglia potenza. Per efempio fi debba differenziare quefta equazione $y = \overline{\text{Cof. } x}^2 - \overline{\text{Sen. } x}^2$. Si faccia $dy = 2\text{ Cof } x\, d.\text{ Cof } x -$ $2 \text{ Sen. } x\, d.\text{Sen.} x$. Ora $d\text{Cof. } x = -dx \text{ Sen.} x$, e $d.\text{ Sen. } x = dx \text{Cof. } x$, che però con foftituirfi quefti valori, fi avrà $dy = -2\,dx\text{Cof.} x\text{Sen.} x - 2dx \text{Cof.} x \text{Sen.} x = -$ $4\, dx \text{ Cof. } x \text{ Sen. } x$. Di fatto $\overline{\text{Cof } x}^2 - \overline{\text{Sen. } x}^2 = \text{Cof. } 2x$ [pel num. 33. [VI.] del calcolo de' triangoli piani Tomo III.], e $-4dx \text{ Cof. } x \text{ Sen. } x$ è il differenziale di $\text{Cof. } 2x$. Per accertarfene fi ponga $2x = z$, con che farà $\text{Cof. } 2x = \text{Cof } z$ Si prenda il differenziale di $\text{Cof. } z$, che [pel num. 75.] è $-dz \text{Sen.} z$: Ma $dz = 2dx$, e $\text{Sen. } z = \text{Sen. } 2x$; Dunque con foftituirfi quefti valori nel differenziale $-dz \text{Sen } z$, ne viene $-2dx \text{Sen. } 2x$; e ficcome (pel num. citato 33. [V.]) $\text{Sen } 2x = 2 \text{ Sen.} x \text{ Cof.} x$, però foftituendofi quefto valore in $-2dx\text{Sen.} 2x$, fi ha finalmente $-4dx\text{Cof.} x\text{Sen.} x$ differenziale di $\text{Cof. } 2x$.

90 Darò per ultimo altri tre efempj, uno rifguardante il modo di differenziare i feni, cofeni, tangenti ec. di logaritmi d' archi dati. Si debba trovare il differenziale di quefta equazione $y = \text{Tang. } l. \frac{a+x}{u}$. Si ponga $l. \frac{a+x}{u} = z$, onde fi avrà $y = \text{Tang. } l. \frac{a+x}{u}$ ridotta a $y = \text{Tang.} z$, il di cui differenziale (pel num. 77.) è $dy = dz \overline{\text{Sec. } z}^2 = \frac{dz}{\overline{\text{Cof. } z}^2}$: Ma $\overline{\text{Cof. } z}^2 = \text{Cof. } \left(l\, \frac{a+x}{u}\right)^2$, e dz prefo dall' equazione $l. \frac{a+x}{u} = z$ è (pel num. 41.) $= \frac{\frac{udx - xdu}{u^2 \times \overline{a+x}}}{u} = \frac{udx - xdu}{u \times \overline{a+x}}$, dunque il differenziale dell' equazione $y = \text{Tang. } l. \frac{a+x}{u}$ è

$dy =$

$$dy = \frac{udx - xdu}{u \times \overline{a+x} \times \text{Cof.}\left(l.\frac{a+x}{u}\right)^2}, \text{ o pure è } dy = \frac{\overline{udx - xdu} \times \text{Sec.}\left(l.\frac{a+x}{u}\right)^2}{u \times \overline{a+x}}.$$

91. Il fecondo efempio verferà ful modo di differenziare una quantità efponenziale, che ha per efponente una funzione di circolo. Debbafi differenziare quefta equazione $y = b^{\text{Cof.}\,\overline{1-x}}$. Si faccia $1-x=z$, e l'equazione propofta fi cambierà nella feguente $y=b^{\text{Cof.}\,z}$. Ora il differenziale di Cof.z è $-dz$ Sen. z (pel num.75); dunque (pel num.47. poichè fuppongo $l.b=1$) il differenziale dell'equazione $y=b^{\text{Cof.}\,z}$ è $dy=b^{\text{Cof.}\,z} \times -dz\,\text{Sen.}\,z$: Ma Sen. z = Sen. $\overline{1-x}$, e $dz=-dx$, come fi ottiene dall'equazione $1-x=z$; dunque foftituendofi quefti valori nell' equazione $dy=b^{\text{Cof.}\,z} \times -dz\,\text{Sen.}\,z$, fi avrà $dy=b^{\text{Cof.}\,\overline{1-x}}\,dx\,\text{Sen.}\,\overline{1-x}$, che è il differenziale cercato.

92. Il terzo efempio verrà fomminiftrato dal logaritmo di una quantità, in cui entra un'efponenziale, il di cui efponente è una funzione di circolo. Sia pertanto da differenziarfi quefta equazione $y = l.\left(u + \sqrt{b^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}} - xx}\right)$. Si ponga $b^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}} = z$, con che l'equazione propofta fi cambierà nella feguente $y = l.\,(u + \sqrt{z - xx})$, il di cui differenziale (pel num. 40.) è

$$dy = \frac{du + \frac{dz - 2xdx}{2\sqrt{z - xx}}}{u + \sqrt{z - xx}} = \frac{2du\sqrt{z - xx} + dz - 2xdx}{2u\sqrt{z - xx} + 2z - 2xx}.$$

Ma $z = b^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}}$, e però $dz = \dfrac{-mb^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}}\,dx\,\text{Sen.}\,x}{\text{Cof.}\,x^2}$; dunque foftituendo quefti valori fi avrà

dy

$$dy = \frac{2du\sqrt{b^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}} - xx} - \frac{mb^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}}dx\,\text{Sen.}\,x}{\overline{\text{Cof.}\,x}^2} - 2xdx}{2u\sqrt{b^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}} - xx} + 2b^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}} - 2xx} = $$

$$\frac{2du\,\overline{\text{Cof.}\,x}^2\sqrt{b^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}} - xx} - mb^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}}dx\,\text{Sen.}\,x - 2xdx\,\overline{\text{Cof.}\,x}^2}{2u\,\overline{\text{Cof.}\,x}^2\sqrt{b^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}} - xx} + 2\,\overline{\text{Cof.}\,x}^2\,b^{\frac{-m}{\text{Cof.}x}} - 2xx\,\overline{\text{Cof.}\,x}^2}.$$

93. Il metodo praticato per differenziare i feni, e cofeni circolari non varia punto per differenziare i feni, e cofeni iperbolici. Si debba primieramente trovare il differenziale di Sen. $b.\,x$. Si ponga $y =$ Sen. $b.\,x$, indi fi aumenti del fuo differenziale l'uno, e l'altro membro di quefta equazione facendo $y + dy$

$=$ Sen. $b\;\overline{x + dx}$, in cui fi foftituifca Sen. $b.\,x$ in luogo di y, e così fi avrà

Sen. $b.\,x + dy =$ Sen. $b.\;\overline{x + dx}$, e però $dy =$ Sen. $b.\;\overline{x + dx}$ — Sen. $b.\,x$.

Ma [pel num. LXX. Tomo IV.] Sen. $b.\;\overline{x + dx} =$ Cof. $b.\,x \times$ Sen. $b.\,dx +$ Sen. $b.\,x \times$ Cof. $b.\,dx$ [prendo $= 1$ il feno totale] $= dx$ Cof. $b.\,x +$ Sen. $b.\,x$, perchè Cof. $b\;dx =$ al feno totale $= 1$, e Sen. $b.\,dx = dx$. Dunque $dy =$ dx Cof. $b.\,x$ differenziale cercato.

94. Si debba in fecondo luogo trovare il differenziale di Cof. $b.\,x$. Si ponga

$y =$ Cof. $b.\,x$, indi fi faccia $y + dy =$ Cof. $b.\;\overline{x + dx}$, confeguentemente

$dy =$ Cof. $b.\;\overline{x + dx}$ — Cof. $b.\,x$. Ora (pel num. citato) Cof. $b.\;\overline{x + dx}$ $=$ Cof. $b.\,x \times$ Cof. $b.\,dx +$ Sen. $b.\,x \times$ Sen. $b.\,dx =$ Cof. $b.\,x + dx$ Sen. $b.\,x$. Dunque $dy = dx$ Sen. $b.\,x$, che è il differenziale cercato.

95. Mediante poi l'uno, o l'altro di quefti differenziali fi trova il valore di dx. A quefto effetto prendiamo dal num. 93. l'equazione $dy = dx$ Cof $b.\,x$, o fia

$d.$ Sen. $b.\,x = dx$ Cof. $b.\,x$; e perchè nell'iperbola è $1 = \overline{\text{Cof.}\,b.\,x}^2 - \overline{\text{Sen.}\,b.\,x}^2$,

fi moltiplichi il primo membro della precedente equazione per $\overline{\text{Cof.}\,b.\,x}^2 - \overline{\text{Sen.}\,b.\,x}^2$,

e fi avrà $d.$ Sen. $b.\,x \times \overline{\text{Cof.}\,b.\,x}^2 - d.$ Sen. $b.\,x \times \overline{\text{Sen.}\,b.\,x}^2 = dx$ Cof. $b.\,x$, o

Digitized by Google

sia $d.\,\text{Sen.}\,b.\,x \times \text{Cos.}\,b.\,x - \dfrac{d.\,\text{Sen.}\,b.\,x \times \overline{\text{Sen.}\,b.\,x}^2}{\text{Cos.}\,b.\,x} = dx$. E perchè con differenziare l'equazione $1 = \overline{\text{Cos.}\,b.\,x}^2 - \overline{\text{Sen.}\,b.\,x}^2$, si ottiene $0 = \text{Cos.}\,b.\,x \times d.\,\text{Cos.}\,b.\,x - \text{Sen.}\,b.\,x \times d.\,\text{Sen.}\,b.\,x$, da cui prendendo il valore di $\text{Sen.}\,b.\,x$, che è [Q] $\text{Sen.}\,b.\,x = \dfrac{\text{Cos.}\,b.\,x \times d.\,\text{Cos.}\,b.\,x}{d.\,\text{Sen.}\,b.\,x}$, e sostituendo il suo quadrato nell'equazione $d.\,\text{Sen.}\,b.\,x \times \text{Cos.}\,b.\,x - \dfrac{d.\,\text{Sen.}\,b.\,x \times \overline{\text{Sen.}\,b.\,x}^2}{\text{Cos.}\,b.\,x} = dx$, ne viene $\overline{d.\text{Sen.}\,b.\,x}^2 \times \text{Cos.}\,b.\,x - \text{Cos.}\,b.\,x \times \overline{d\,\text{Cos.}\,b.\,x}^2 = dx$, che con sostituire nel secondo membro in luogo di $\text{Cos.}\,b.x \times d.\text{Cos.}\,b.x$ il suo valore $\text{Sen.}\,b\,x \times d.\text{Sen.}\,b.x$ preso dall' equazione [Q] diventa $dx = \overline{d.\text{Sen.}\,b.\,x}^2 \times \text{Cos.}\,b.\,x - \text{Sen.}\,b.\,x \times d\,\text{Sen.}\,b.\,x \times d.\text{Cos.}\,b.\,x = d.\,\text{Sen.}\,b\,x \times \text{Cos.}\,b.\,x - \text{Sen.}\,b.\,x \times d.\text{Cos.}\,b.x$, che è il cercato valore di dx.

96. Con servirsi dell' equazione $d.\,\text{Sen.}\,x = dx\,\text{Cos.}\,x$ del num. 73., o pure dell' equazione $d.\,\text{Cos.}\,x = -dx\,\text{Sen.}\,x$ del num. 75., indi operare nella maniera poc'anzi praticata, si trova il differenziale di un dato arco di cerchio x espresso d'altra maniera, che quella trovata ai num. 53., 55., cioè $dx = \text{Cos.}\,x \times d.\text{Sen.}\,x - \text{Sen.}\,x \times d.\text{Cos.}\,x$.

97. Prima di terminar quest' articolo troviamo i differenziali delle quattro seguenti quantità (1) $\overline{\text{Sen.}\,x}^{m-1} \times \text{Cos.}\,x$; (2) $\overline{\text{Cos.}\,x}^{m-1} \times \text{Sen.}\,x$; (3) $\overline{\text{Sen.}\,b.\,x}^{m-1} \times \text{Cos.}\,b.\,x$; (4) $\overline{\text{Cos.}\,b.\,x}^{m-1} \times \text{Sen.}\,b.\,x$, affine di dedurne quattro teoremi, che avran poi uso in appresso.

98. Con differenziare la prima quantità si ha $d.\,(\overline{\text{Sen.}\,x}^{m-1} \times \text{Cos.}\,x) = \overline{m-1} \times \overline{\text{Cos.}\,x}^2 \times \overline{\text{Sen.}\,x}^{m-2} \times dx - \overline{\text{Sen.}\,x}^m \times dx =$ (con sostituirsi $1 - \overline{\text{Sen.}\,x}^2$ in luogo di $\overline{\text{Cos.}\,x}^2$) $\overline{m-1} \times \overline{1 - \overline{\text{Sen.}\,x}^2} \times \overline{\text{Sen.}\,x}^{m-2} \times dx - \overline{\text{Sen.}\,x}^m \times dx = \overline{m-1} \times \overline{\text{Sen.}\,x}^{m-2} \times dx - m\,\overline{\text{Sen.}\,x}^m\,dx$. Essendo pertanto $d.\,(\overline{\text{Sen.}\,x}^{m-1} \times \text{Cos.}\,x) = \overline{m-1} \times \overline{\text{Sen.}\,x}^{m-2} \times dx - m\,\overline{\text{Sen.}\,x}^m\,dx$, si avrà [I.] $m\,\overline{\text{Sen.}\,x}^m\,dx = \overline{m-1} \times \overline{\text{Sen.}\,x}^{m-2} \times dx - d.\,(\overline{\text{Sen.}\,x}^{m-1} \times \text{Cos.}\,x)$, che è il primo teorema.

99.

Digitized by Google

99. Si differenzi la seconda quantità, e si avrà $d.\,[\overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m-1} \times \mathrm{Sen.}\,x] = -\,\overline{m+1} \times \overline{\mathrm{Sen.}\,x}^{\,2} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m-2} \times dx + \overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m} \times dx =$ [con sostituirsi $1 - \overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,2}$ in luogo di $\overline{\mathrm{Sen.}\,x}^{\,2}$) $-\,\overline{m+1} \times \overline{1 - \overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,2}} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m-2} \times dx + \overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m} \times dx = -\,\overline{m+1} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m-2} \times dx + m\,\overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m}\,dx$. Adunque essendo $d.\,(\overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m-1} \times \mathrm{Sen.}\,x) = -\,\overline{m+1} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m-2} \times dx + m\,\overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m}\,dx$, si avrà [II.] $m\,\overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m}\,dx = \overline{m-1} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m-2} \times dx + d.\,[\overline{\mathrm{Cos.}\,x}^{\,m-1} \times \mathrm{Sen.}\,x]$, che è il secondo teorema.

100. Si differenzi la terza quantità, e ne verrà $d.\,[\overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m-1} \times \mathrm{Cos.}\,b.\,x] = \overline{m-1} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,2} \times \overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m-2} \times dx + \overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m}\,dx =$ (con sostituire $1 + \overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,2}$ in luogo di $\overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,2}$) $\overline{m-1} \times \overline{1 + \overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,2}} \times \overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m-2} \times dx + \overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m}\,dx = \overline{m-1} \times \overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m-2} \times dx + m\,\overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m}\,dx$. Quindi essendo $d.\,(\overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m-1} \times \mathrm{Cos.}\,b.\,x) = \overline{m-1} \times \overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m-2} \times dx + m\,\overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m}\,dx$, si avrà [III.] $m\,\overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m}\,dx = -\,\overline{m+1} \times \overline{\mathrm{Sen.}\,b\,x}^{\,m-2} \times dx + d.\,(\overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,m-1} \times \mathrm{Cos.}\,b.\,x)$, che è il terzo teorema.

101. Si differenzi la quarta quantità, e ne verrà $d.\,(\overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m-1} \times \mathrm{Sen.}\,b.\,x) = \overline{m-1} \times \overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,2} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m-2} \times dx + \overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m}\,dx =$ (con sostituire $\overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,2} - 1$ in luogo di $\overline{\mathrm{Sen.}\,b.\,x}^{\,2}$) $\overline{m-1} \times \overline{\overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,2} - 1} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m-2} \times dx + \overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m}\,dx = \overline{m-1} \times \overline{-\,\overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}}^{\,m-2} \times dx + m\,\overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m}\,dx$. Che però essendo $d.\,[\overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m-1} \times \mathrm{Sen.}\,b.\,x] = -\,\overline{m+1} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m-2} \times dx + m\,\overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m}\,dx$, si avrà [IV.] $m\,\overline{\mathrm{Cos.}\,b\,x}^{\,m}\,dx = \overline{m-1} \times \overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m-2} \times dx + d.\,[\overline{\mathrm{Cos.}\,b.\,x}^{\,m-1} \times \mathrm{Sen.}\,b.\,x]$, che è il quarto teorema.

ARTICOLO VI.

Della maniera di prendere i differenziali di secondo, terzo ec. grado di una proposta quantità.

102. Siccome i differenziali primi non altro sono, che le differenze minori di qualunque quantità assegnabile, che passano tra due, o più quantità finite, così i differenziali secondi non altro sono, che le differenze minori di qualsivoglia dato differenziale primo, che passano tra gli stessi differenziali primi; i differenziali terzi sono le differenze minori di qualsivoglia dato differenziale secondo, che passano fra gli stessi differenziali secondi ec.. Che però in quella guisa, che i differenziali primi sono quantità infinitamente piccole rispetto alle quantità finite, così i differenziali secondi sono quantità infinitamente piccole rispetto ai differenziali primi, i differenziali terzi sono infinitamente piccoli rispetto ai differenziali secondi ec.

103. Questi differenziali pertanto primi, secondi, terzi, quarti ec. si trovano nella stessa maniera, con cui ai n. 762., 808, 844, 857., 868. Tomo I. si sono trovate le differenze prime, seconde, terze ec. di date quantità. Eccone l'esempio

Differenze quarte				$x'''' - 4x''' + 6x'' - 4x' + x$				
Differenze terze			$x''' - 3x'' + 3x' - x$		$x'''' - 3x''' + 3x'' - x'$			
Differenze seconde		$x'' - 2x' + x$		$x''' - 2x'' + x'$		$x'''' - 2x''' + x''$		
Differenze prime	$x' - x$		$x'' - x'$		$x''' - x''$		$x'''' - x'''$	
Quantità finite	x		x'		x''		x'''	x''''.

ove x, x', x'', x''', x'''' ec. rappresenta una serie di quantità finite, che differiscono tra loro di quantità infinitamente piccole, che sono $x'-x$, $x''-x'$, $x'''-x''$, $x''''-x'''$ ec., le quali pure costituiscono una serie, e differiscono tra loro colle quantità rispetto alle medesime infinitamente piccole $x''-2x'+x$, $x'''-2x''+x'$, $x''''-2x'''+x''$ ec.. Queste differenze parimente costituiscono una serie, e le quantità, colle quali differiscono tra loro, sono $x'''-3x''+3x'-x$, $x''''-3x'''+3x''-x'$ ec., che rispetto alle precedenti sono infinitamente piccole ec.

104. Basta osservare la di sopra ritrovata espression generale delle differenze, e delle differenze di differenze per rilevare la legge, colla quale esse procedono: Primieramente se la lettera m rappresenterà il grado, o sia l'ordine delle differenze, qualsivoglia differenza costerà di tanti termini affetti da segni alternanti, quanti ne mostra il numero $m+1$; e in secondo luogo questi termini saranno affetti dai coefficienti, che competono ai termini delle potestà dello stesso grado, in cui so-

no

no le differenze; onde la formola $x^m - mx^{m-1} + \frac{m \times \overline{m-1}}{1.\ 2.} \times x^{m-2} -$

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times x^{m-3}$ + ec. [del num. 256. Tomo II.] servirà ad esibire d'un colpo le differenze di qualsivoglia ordine, bastando sostituire ad m il numero dell' ordine cercato. Come se si vorranno le differenze terze, si dovrà fare $m = '''$, con che la precedente formola si cambierà in $x''' - 3x'' + 3x' - x$. E quì si osservi, che in questo caso il quarto termine della formola si riduce ad $x^{'''-3}$, lo che non vuolsi già esprimere così x^0, che rappresenta l'unità, ma si vuol indicare, che in questo quarto termine alla x non compete alcun'apice, e in conseguenza questo quarto termine si riduce ad x.

105. Se le quantità x, x', x'', x''', x'''' ec. si supporranno tutte eguali fra loro, le differenze prime $x'-x$, $x''-x'$, $x'''-x''$ ec. saranno eguali a zero, ma non lo saranno già se le quantità x, x', x'', x''' ec., saranno ineguali, e come variabili. Che se essendo ineguali le quantità x, x', x'', x''' ec., si supporranno eguali, e costanti le differenze prime $x'-x$, $x''-x'$, $x'''-x''$ ec., in tal caso saranno eguali a zero le differenze seconde, laddove saranno qualche cosa, se le differenze prime saranno ineguali, e variabili. Parimente se essendo ineguali, e variabili le quantità x, x', x'', x''' ec., e le differenze prime, si supporranno eguali e costanti le differenze seconde, saranno eguali a zero le differenze terze; che se saranno ineguali, e variabili oltre le quantità x, x', x'', x''' ec., anche le differenze prime, e seconde, le differenze terze saranno qualche cosa; e così in poi: Onde generalmente se le differenze dell'ordine m si supporranno costanti, le differenze dell' ordine superiore $m+1$, e molto più degli altri ordini $m+2$, $m+3$ ec., saranno eguali a zero.

106. La caratteristica de'differenziali del secondo ordine è dd, o sia d^2, del terzo ordine è ddd, o sia d^3 ec.: Onde della variabile x siccome il differenziale primo è dx, così il differenziale secondo è ddx, o pure d^2x, il differenziale terzo è $dddx$, o sia d^3x. E quì si osservi, che altro è d^2x, altro $\overline{dx}^2$: L'espressione d^2x vuol indicare il differenziale secondo di x, laddove $\overline{dx}^2$ esprime il quadrato di dx: Così d^3x rappresenta il differenziale terzo di x, e $\overline{dx}^3$ vuol significare il cubo di dx.

107. Allorchè le variabili crescono, i loro differenziali secondi, terzi ec. si prendono positivi, e *vice versa* sono negativi ogniqualvolta decrescono le variabili.

108. Dopo avere esposto cosa siano, e cosa debbasi intendere per differenziali secondi, terzi ec. di quantità variabili, vediamo come di una data variabile, o di più variabili date si prendano questi differenziali degli ordini superiori. La maniera è la stessa, che quella, con cui si prendono le differenze prime delle quanti-

tà

tà finite: Si confiderano i differenziali primi a modo di quantità variabili, e fi differenziano infieme con le altre variabili a norma de' metodi per le medefime efpofti. Così il differenziale di dx, che viene ad effere il differenziale feeondo di x, è d^2x; il differenziale di $\overline{dx}^2$ è $2dx\,d^2x$, e generalmente il differenziale di $\overline{dx}^m$ è $m\,\overline{dx}^{m-1}\,d^2x$. Avendofi $mx^{m-1}dx$ differenziale primo di x^m, fe fi vorrà il differenziale fecondo, bifognerà differenziare $mx^{m-1}dx$, facendo $m \times \overline{m-1} \times x^{m-2}\,\overline{dx}^2 + mx^{m-1}\,d^2x$, e con differenziare quefto differenziale fecondo, fi otterrà il differenziale terzo di x^m, che è $m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times x^{m-3}\,\overline{dx}^3 + 3m \times \overline{m-1} \times x^{m-2}\,dx\,d^2x + mx^{m-1}\,d^3x$; così il differenziale di quefto differenziale, che è il differenziale quarto di x^m, trovafi effere $m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times x^{m-4}\,\overline{dx}^4 +$
$6m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times x^{m-3}\,\overline{dx}^2\,d^2x + 3m \times \overline{m-1} \times x^{m-2}\,\overline{d^2x}^2 +$
$4m \times \overline{m-1} \times x^{m-2}\,dx\,d^3x + mx^{m-1}\,d^4x$. Si debba prendere il differenziale di $-\dfrac{2x^2dx - dx \times \overline{a - x^2}}{x^2}$, che è il differenziale di $\dfrac{a - x^2}{x}$: Si faccia

$$-\frac{2x^4d^2x - x^2d^2x \times \overline{a - x^2} + 2x^3\,\overline{dx}^2 + 2x\,\overline{dx}^2 \times \overline{a - x^2}}{x^4}$$

, che è il differenziale cercato, vale a dire il differenziale fecondo di $\dfrac{a - x^2}{x}$. Se fi vorrà differenziare ancora il differenziale trovato, affine di avere il differenziale terzo di $\dfrac{a - x^2}{x}$, fi farà

$$-\frac{8x^7dxd^2x - 2x^8d^3x - \overline{2x^5dxd^2x - x^6d^3x} \times \overline{a - x^2}}{x^8}$$

$$\frac{+ 2x^7dxd^2x + 6x^6\,\overline{dx}^3 + 4x^7dxd^2x + \overline{2x^4\,\overline{dx}^3 + x^5dxd^2x} \times \overline{a - x^2} - 4x^6\,\overline{dx}^3}{x^8}$$

+ x^8?

Digitized by Google

$$\frac{+8x^7dxd^2x + 4x^5dxd^2x \times \overline{a - x^2} - 8x^6\overline{dx}^3 - 8x^4\overline{dz}^3 \times \overline{a - x^2}}{x^8}$$, che si

riduce a $- \dfrac{x^8d^3x - ax^6d^3x + 6ax^5dxd^2x - 6ax^4\overline{dx}^3}{x^8}$, o sia

$$- \frac{x^4d^3x - ax^2d^3x + 6axdxd^2x - 6a\overline{dx}^3}{x^4}.$$

109. Questi esempj potranno bastare per vedere, come si prendano i differenziali secondi, terzi ec. di quelle quantità, nelle quali entra una sola variabile. Per maggiore chiarezza riandiamo passo passo su l' operazione fatta nel differenziare la quantità $- 2x^2dx - dx \times \overline{a - x^2}$ (ommetto il divisore x^2 per brevità), acciò meglio si scorga la maniera praticata, e da praticarsi nel prendere i differenziali secondi, terzi ec. di qualsivoglia altra quantità. Ora cominciando dal primo termine $2x^2dx$, poichè egli è composto da due fattori $2x^2$, e dx, per avere il suo differenziale bisogna a norma del num. 26. prendere primieramente il prodotto del differenziale di $2x^2$ in dx, che è $4x\overline{dx}^2$, poi il prodotto del differenziale di dx in $2x^2$, che è $2x^2d^2x$, nel qual modo il differenziale di $- 2x^2dx$ è $- 4x\overline{dx}^2 - 2x^2d^2x$. Passo adesso al secondo termine $dx \times \overline{a - x^2}$, che è pur composto da due fattori, che sono dx, ed $a - x^2$, onde per avere il di lui differenziale bisogna prendere primieramente il prodotto del differenziale di dx in $a - x^2$, poscia il prodotto di dx nel differenziale di $a - x^2$, nel qual modo si ha $- d^2x \times \overline{a - x^2} + 2x\overline{dx}^2$ pel differenziale di $- dx \times \overline{a - x^2}$, conseguentemente il differenziale di $- 2x^2dx - dx \times \overline{a - x^2}$ è $- 4x\overline{dx}^2 - 2x^2d^2x - d^2x \times \overline{a - x^2} + 2x\overline{dx}^2$; è però il differenziale di

$$- \frac{2x^2dx - dx \times \overline{a - x^2}}{x^2}$$ è

$$\frac{- 4x^3\overline{dx}^2 - 2x^4d^2x - x^2d^2x \times \overline{a - x^2} + 2x^3\overline{dx}^2 - 2xdx \times \overline{-2x^2dx - dx \times \overline{a - x^2}}}{x^4}$$

= —

$$= - \frac{2x^4d^2x - x^2d^2x \times \overline{a - x^2} + 2x^3\overline{dx}^2 + 2x\overline{dx}^2 \times \overline{a - x^2}}{x^4} =$$

$$- \frac{x^3d^2x - axd^2x + 2a\overline{dx}^2}{x^3} = - d^2x \times \frac{\overline{x^2 + a}}{x^2} + \frac{2a\overline{dx}^2}{x^3}.$$

110. Passiamo alle formole, nelle quali entrano due, o più variabili, e primieramente si debba prendere il differenziale di $ydx + xdy$, che è il differenziale di xy. Operando nel modo detto si ha $2dydx + yd^2x + xd^2y$, che è il differenziale secondo: Se in oltre si vorrà il differenziale del differenziale trovato, si avrà $3dxd^2y + 3dyd^2x + yd^3x + xd^3y$, che è il differenziale terzo di xy. Essendo dato $X = \frac{ydx}{dy}$, si avrà $d.X = \frac{\overline{dy}^2 dx + ydyd^2x - ydxd^2y}{\overline{dy}^2}$; $d^2.X =$

$$\frac{-\overline{dy}^3 dxd^3y + 2\overline{dy}^4 d^2x + y\overline{dy}^3 d^3x - y\overline{dy}^2 dxd^3y - 2y\overline{dy}^2 d^2xd^2y + 2ydydx\overline{d^2y}^2}{\overline{dy}^4}$$

Sia dato $X = \frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dz}$, si avrà $d.X =$

$$\frac{dydz\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} + ydz \times \frac{\overline{dxd^2x + dyd^2y}}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} - yd^2z\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dz}^2} =$$

$$\frac{\overline{dx}^2 dydz + \overline{dy}^3 dz + ydzdxd^2x + ydzdyd^2y - y\overline{dx}^2 d^2z - y\overline{dy}^2 d^2z}{\overline{dz}^2\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}.$$

Essendo $X = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, si avrà $d.X =$

$\overline{dx}^2$

Digitized by Google

$$\frac{\overline{\overline{dx}^2 + xd^2x + \overline{dy}^2 + yd^2y}\sqrt{x^2+y^2} - \overline{xdx - ydy} \times \frac{\overline{xdx+ydy}}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$\frac{x^3d^2x + x^2\overline{dy}^2 + x^2yd^2y + y^2\overline{dx}^2 + xy^2d^2x + y^3d^2y - 2xydxdy}{\overline{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Sia $X = \dfrac{\overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{-dxd^2y}$, si avrà $d.\,X =$

$$\frac{3 \times \overline{dxd^2x + dyd^2y} \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \times -dxd^2y + \overline{d^2xd^2y + dxd^3y} \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^2}{\overline{dx}^2\,\overline{d^2y}^2\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$$

$$= \frac{3 \times \overline{dxd^2x + dyd^2y}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \times -dxd^2y + \overline{d^2xd^2y + dxd^3y} \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^{\frac{3}{2}}}{\overline{dx}^2\,\overline{d^2y}^2}$$

111. Veniamo alle quantità logaritmiche, e sia $X = \dfrac{dx}{x}$, che è il differenziale di $l.\,x$, si avrà $d.\,X = \dfrac{xd^2x - \overline{dx}^2}{x^2}$; $d^2.\,X =$

$$\frac{-3xdxd^2x + x^2d^3x + 2\overline{dx}^3}{x^3};\ d^3.\,X =$$

$$\frac{12x\overline{dx}^2 d^2x - 3x^2\overline{d^2x}^2 - 4x^2dxd^3x + x^3d^4x - 6\overline{dx}^4}{x^4}.$$

Essendo $X = \dfrac{ydx - xdy}{xy}$, che è il differenziale di $l.\,\dfrac{x}{y}$, si avrà

$$d.\,X = \frac{xy^2d^2x - x^2yd^2y + x^2\,\overline{dy}^2 - y^2\,\overline{dx}^2}{x^2y^2};$$

$$d^2.\,X = \frac{x^2y^4dxd^2x + 2x^3y^3dyd^2x + x^3y^4d^3x - 2x^3y^3dxd^2y}{x^4y^4}$$

$$\frac{- x^4y^2dyd^2y - x^3y^3d^3y + 2x^3y^2dx\,\overline{dy}^2 + 2x^4y^2dyd^2y}{x^4y^4}$$

$$\frac{- 2x^2y^3dy\,\overline{dx}^2 - 2x^2y^4dxd^2x - 2x^2y^4dxd^2x + 2x^3y^3dxd^2y}{x^4y^4}$$

$$\frac{- 2x^3y^2dx\,\overline{dy}^2 + 2xy^4\,\overline{dx}^3 - 2x^3y^3dyd^2x}{x^4y^4}$$

$$\frac{+ 2x^4y^2dyd^2y - 2x^4y\,\overline{dy}^3 + 2x^2y^3dy\,\overline{dx}^2}{x^4y^4} =$$

$$\frac{- 3xy^3dxd^2x + x^2y^3d^3x + 3x^3ydyd^2y - x^3y^2d^3y + 2y^3\,\overline{dx}^3 - 2x^3\,\overline{dy}^3}{x^3y^3}.$$

112. Quanto alle quantità esponenziali sia $X = b^x dx$, che è il differenziale di b^x, supposto che sia $l.b = 1$, si avrà $d.\,X = b^x\,\overline{dx}^2 + b^x d^2x$; $d^2.\,X = b^x\,\overline{dx}^3 + 3b^x dxd^2x + b^x d^3x$. Sia $X = y^z dz l.\,y + zy^{z-1}dy$, che è il differenziale di y^z, sarà $d.\,X = y^z\,\overline{dz}^2\,\overline{l.\,y}^2 + y^z l.\,y d^2z + 2y^{z-1}dzdy + 2zy^{z-1}dzdy l.\,y + z^2y^{z-2}\,\overline{dy}^2 + zy^{z-1}d^2y - zy^{z-2}\,\overline{dy}^2$

113. Passiamo per ultimo alle funzioni di circolo, e vediamo brevemente, come di loro si prendano i differenziali superiori. E primieramente sia

$X = \frac{-dx}{\sqrt{1 - xx}}$, che è il differenziale della quantità a. di Cos. x, sarà

$d.\,X =$

$$d.\,X = \frac{-\overline{1+xx} \times d^2x - x\,\overline{dx}^2}{\overline{1-xx}\,\sqrt{1-xx}}\ ;\ d.^2\,X =$$

$$\frac{\overline{xx-1} \times \overline{1-xx}\sqrt{1-xx} \times d^3x - \overline{1+xx}\sqrt{1-xx} \times \overline{dx}^3 + 3x \times \overline{xx-1}\sqrt{1-xx} \times d^2x - 3x^2\sqrt{1-xx} \times \overline{dx}^3}{\overline{\overline{1-xx}\,\sqrt{1-xx}}^2}$$

Essendo dato $X = \frac{dx}{\overline{\text{Cos.}\,x}^2}$, che è il differenziale di Tang. x, si avrà

$$d.\,X = \frac{d^2x\,\overline{\text{Cos.}\,x}^2 + 2\,\overline{dx}^2\ \text{Cos.}\,x\ \text{Sen.}\,x}{\overline{\text{Cos.}\,x}^4} = \frac{d^2x\,\text{Cos.}\,x + 2\,\overline{dx}^2\ \text{Sen.}\,x}{\overline{\text{Cos.}\,x}^3}\ ;\ d^2\,X =$$

$$d^3\,x\,\overline{\text{Cos.}\,x}^2 + \frac{6dx\,d^2x\,\text{Sen.}\,x\,\text{Cos.}\,x + 6\,\overline{dx}^3\ \overline{\text{Sen.}\,x}^2 + 2\,\overline{dx}^3\ \overline{\text{Cos.}\,x}^2}{\overline{\text{Cos.}\,x}^4}.$$

114. Fin' ora ho esposto le maniera di trovare i differenziali secondi, terzi ec. di una data variabile, o pure di una formola, nella quale una, o più variabili abbiano luogo. Ma quì si osservi, che questi differenziali secondi, terzi ec. non possono avere un valore certo, e determinato, ma restano sempre con un valore vago, e indeterminato, qualora prescritta non sia la legge, secondo la quale procedono i successivi valori delle variabili. Ma siccome ogniqualvolta viene fissata la legge, secondo la quale procedono i successivi valori delle variabili, resta ancora tolto determinato l' ordine, o sia il grado delle differenze, che devono essere costanti, come rispetto alle quantità finite (la cosa poi cammina d'egual passo tanto nelle quantità finite, che nelle infinitesime) si può osservar nelle serie trattate all' Art. IX. Cap. III. Tomo II., così per determinare la legge con cui procedono i successivi valori delle variabili, onde i differenziali superanti il primo ordine acquistino un valore determinato, fa di mestiere nel calcolo prendere per costante qualch' uno de' differenziali.

115. Per mettere la cosa sotto agli occhi, e far vedere come tostochè un qualche differenziale si prende costante, viensi con ciò a prescrivere la legge, colla quale procedono i successivi valori delle variabili, sia x una proposta quantità variabile, il di cui differenziale primo sia x', il differenziale secondo sia x'', il differenziale terzo x''' ec., e suppongasi che questo differenziale x''' sia costante, nel qual caso il differenziale x'''' sarà $= 0$. Poichè i differenziali primi non altro sono, che le differenze dei successivi valori della variabile x; i differenziali secondi non altro sono, che le differenze che passano tra i differenziali primi, e i differenziali terzi sono le differenze, che passano tra i differenziali secondi ec., egli è chiaro, che assunti costanti, cioè tutti eguali fra loro i differenziali terzi, e dati i differenziali primi, e secondi si può a norma del num. 699. Tomo II. giungere con

que-

questi dati a trovare la serie, che nasce dai successivi valori della variabile x, conseguentemente la legge, con cui procedono i termini di questa serie resta determinata coll' essersi assunti costanti i differenziali terzi. Vediamolo coll' esempio seguente. Scrivo in (A) la data quantità x, scrivo in (B) il differenziale primo x', che deve soprastare al secondo termine della serie (A), perchè è la differenza, che passa tra il di lei primo (A), e secondo termine (E); scrivo in (C) il differenziale secondo x'',

$$\begin{array}{lcccccc}
 & & & & (D)\ x''' & & x''' \\
 & & (C)\ x'' & & x''+x''' & & x''+2x''' \\
 & (B)\ x' & & x'+x'' & x'+2x''+x''' & & x'+3x''+3x''' \qquad \text{ec.} \\
(A)\ x. & x+x' & & x+2x'+x''. & x+3x'+3x''+x'''. & & x+4x'+6x''+4x''' \\
 & (E) & & (F) & (G) & & (H)
\end{array}$$

che deve soprastare al terzo termine (F) delle serie (A), perchè è la differenza, che passa tra il primo, e secondo termine della serie (B); finalmente scrivo in (D) il differenziale terzo x''', che deve soprastare al quarto termine [G] della serie [A], poichè è la differenza, che passa il primo, e secondo termine della serie [C]: disposti così gli assunti differenziali sommo il primo termine x'' della serie (C) col differenziale costante x''' della serie (D), e mi viene $x''+x'''$, che è il secondo termine della serie (C): sommo questo secondo termine col differenziale costante x''' della serie [D], e mi viene $x''+2x'''$, che è il terzo termine della serie [C], e collo stesso metodo trovo quanti voglio de' susseguenti termini di questa serie, i quali termini sono altrettanti differenziali secondi ne' termini della serie [A]. Passo adesso a trovare i termini della serie [B], e a tale effetto sommo il primo termine x' della serie [B] col primo termine x'' della serie [C], e mi viene $x'+x''$, che è il secondo termine della serie [B]: sommo in seguito questo secondo termine $x'+x''$ col secondo termine $x''+x'''$ della serie (C), e mi viene $x'+x''+x'''$, che è il terzo termine della serie (B), e continuando lo stesso modo d'operare trovo gli altri di lei susseguenti termini, che sono i differenziali primi de' termini della serie (A). Vengo per ultimo alla serie [A], e con sommare il suo primo termine x col primo termine x' della serie [B], mi viene $x+x'$, che è il secondo termine [E] della serie [A]: In seguito sommo questo secondo termine $x+x'$ col secondo termine $x'+x''$ della serie (B), con che ritrovo $x+2x'+x''$, che è il terzo termine (F) della serie (A), e in questo modo continuando, ritrovo gli altri di lei termini [G], [H] ec. Ecco pertanto come data la quantità x, e i di lei differenziali x', x'', x''', e presi costanti i differenziali terzi, si trovino i successivi valori di questa variabile, vale a dire i termini della serie (A), e però si determina la legge, con cui procedono.

116. Colla maniera praticata si sono trovati i termini della serie (A), che vanno a destra della proposta variabile x; che se si vorranno ancora quei, che le vanno a sinistra, bisognerà operare così: Dal primo termine x'' della serie (C) si sottragga il suo sovrapposto x''' della serie (D), e si avrà $x''-x'''$, che è il secondo termine della serie (C), dal quale sottraendosi il sovrapposto x''', si avrà

x''

$x'' - 2x'''$, che è il terzo termine della ferie (C), e così continuando a operare fi otterranno gli altri, che vengono in poi: Parimente dal primo termine x' della ferie (B)

$$\begin{array}{ccccc} x''' & x''' & x''' & x''' & x'''\ \ x'''\ \text{(D)} \\ x''-5x''' & x''-4x''' & x''-3x''' & x''-2x''' & x''-x'''.\ x''\ \text{(C)} \\ x'-4x''+10x''' & x'-3x''+6x''' & x'-2x''+3x''' & x'-x''+x'''. & x'\ \text{(B)} \\ x-3x'+6x''-10x'''. & x-2x'+3x''-4x'''. & x-x'+x''-x'''. & x.\ \text{(A)} & \\ \text{(N)} & \text{(M)} & \text{(K)} & & \end{array}$$

fi fottragga il fovrappofto $x''-x'''$ della ferie (C), e fi avrà $x'-x''+x'''$, che è il fecondo termine della ferie (B), dal quale fottraendofi il fovrappofto $x''-2x'''$ ne viene $x'-2x''+3x'''$, che è il di lei terzo termine; e colla fteffa legge fi ritrovino gli altri. D'egual maniera fi opera per trovare i termini (K), (M), (N) ec. della ferie (A): Dal primo termine x fi fottragga il fovrappofto $x'-x''+x'''$, e fi avrà, $x-x'+x''-x'''$, che è il fecondo termine della ferie [A]; così il di lei terzo termine $x-2x'+3x''-4x'''$ fi ritrova con fottrarre dal fecondo $x-x'+x''-x'''$ il fovrappofto $x'-2x''+3x'''$, e collo fteffo modo fi troveranno tutti gli altri fuffeguenti.

217. Per ritrovar la legge, con cui procedono i termini della ferie (A) cioè a dire i fucceffivi valori della variabile è adunque neceffario il fiffare quai differenziali, o primi, o fecondi, o terzi, s' abbiano a prendere coftanti, e ficcome qualora non è determinata la legge, colla quale procedono i fucceffivi valori della variabile, refta vago e indeterminato il valore dei differenziali fecondi, e degli altri ordini fuperiori; quindi è, che acciò ottengano un valor fiffo quefti differenziali, e d' uopo nel calcolo affumere coftante qualche differenziale o primo, o fecondo, nel qual modo la formola, nella quale trovanfi i differenziali fecondi, terzi ec., e il di cui valore varia, fecondo che quefto, o quel differenziale fi prende coftante, acquifterà tofto un determinato valore. Di fatto fe in una formola fi troverà il differenziale quarto $\frac{x^4\, d^4 x}{\overline{dx}^2\, d^2x}$, che a motivo di $d^4 x$, e $\overline{dx}^2\, d^2 x$ infinitamente piccoli omogenei deve avere un valore finito, e fi fupponga dx coftante, farà $\frac{x^4\, d^4 x}{\overline{dx}^2\, d^2x} = 0$; che fe fi fupporrà coftante il differenziale di x^2, che è $2xdx$, il differenziale di quefto, vale a dire il differenziale fecondo di x^2, farà eguale a zero, onde fi avrà $2\overline{dx}^2 + 2xd^2x = 0$, da cui fi ricava $d^2 x = -\frac{\overline{dx}^2}{x}$; ed eguale a zero farà il differenziale terzo di x^2, cioè $3dxd^2x + xd^3x = 0$, che fomminiftra $d^3 x = -\frac{3dxd^2 x}{x}$; e parimente eguale a zero il differenziale quarto di

x^2

x^2, vale a dire $3\,\overline{d^2x}^2 + 4dxd^3x + xd^4x = 0$, da cui si ottiene il valore di d^4x, che è $= -\frac{3\,\overline{d^2x}^2 - 4dxd^3x}{x} = \frac{3\,\overline{dx}^2 d^2x + 12\,\overline{dx}^2 d^2x}{x^2}$ (mediante la sostituzione del valore di d^2x, e di d^3x): Che però se in $\frac{x^4 d^4x}{\overline{dx}^2 d^2x}$ si sostituirà questo valore di d^4x, si avrà $x^4 \times \frac{\overline{3\,\overline{dx}^2 d^2x + 12\,\overline{dx}^2 d^2x}}{\overline{dx}^2 d^2x} = 15\,x^2$. Supponiamo adesso costante il differenziale di x^3, che è $3x^2dx$, nel qual caso sarà eguale a zero il differenziale di questo differenziale, vale a dire il differenziale secondo di x^3, e però si avrà $2\,\overline{dx}^2 + xd^2x = 0$, da cui si ricava $d^2x = -\frac{2\,\overline{dx}^2}{x}$; ed eguale a zero sarà il differenziale terzo di x^3, vale a dire $5\,dxd^2x + xd^3x = 0$, che esibisce $d^3x = -\frac{5\,dxd^2x}{x}$; e parimente eguale a zero il differenziale quarto di x^3, cioè $5\,\overline{d^2x}^2 + 6\,dxd^3x + xd^4x = 0$, da cui si ha $d^4x = -\frac{5\,\overline{d^2x}^2 - 6dxd^3x}{x} = +\frac{10\,\overline{dx}^2 d^2x + 30\,\overline{dx}^2 d^2x}{x^2}$; che però sostituendosi questo valore di d^4x in $\frac{x^4 d^4x}{\overline{dx}^2 d^2x}$, ne viene $x^4 \times \frac{\overline{10\,\overline{dx}^2 d^2x + 30\,\overline{dx}^2 d^2x}}{x^2\,\overline{dx}^2 d^2x} = 40x^2$. Ecco pertanto come con supporsi dx costante si ha $\frac{x^4 d^4x}{\overline{dx}^2 d^2x} = 0$, con supporsi costante il differenziale di x^2, ne viene $\frac{x^4 d^4x}{\overline{dx}^2 d^2x} = 15\,x^2$, e con supporre costante il differenziale di x^3, si trova

x^4

Digitized by Google

$\frac{x^4 d^4 x}{\overline{dx}^2 d^2 x} = 40 x^2$: Onde variando il valore di $\frac{x^4 d^3 x}{\overline{dx}^2 d^2 x}$ fecondo che fi prende coftante un differenziale, o l' altro, abbaftanza fi fcorge, che refta vago, e indeterminato il valore di $\frac{x^4 d^4 x}{\overline{dx}^2 d^4 x}$ fintanto che non fi affume coftante qualche differenziale, e in confeguenza è meftiere nel calcolo prendere qualche differenziale coftante a fine di fiffare il valore agli altri, e conciliare alle formole il proprio determinato valore.

118. Quello che ho detto delle formole, nelle quali entra una fola variabile; devefi per la ragione addotta intendere ancora dell' altre, in cui entrano più variabili. Vediamone l' efempio nell' equazione $ax = y^2$ alla parabola, che differenziara è $adx = 2ydy$. Se quefta equazione fi differenzierà di nuovo non fupponendo coftante alcun differenziale, pofcia fupponendo coftante dx, indi dy, fi avrà

Niun differenziale primo fi prende coftante	$ad^2x = 2\overline{dy}^2 + 2yd^2y$
Si affume coftante dx	$0 = 2\overline{dy}^2 + 2yd^2y$
Si fa coftante dy	$ad^2x = 2\overline{dy}^2$

Prendiamo i differenziali terzi della fteffa equazione $adx = 2ydy$ non fupponendo primieramente alcun differenziale coftanre, indi prendendo coftanre dx, poi dy, in feguito d^2x, e finalmente d^2y, e ne verrà

Niun differenziale fi prende coftante	$ad^3x = 6dyd^2y + 2yd^3y$
Si fa coftante dx	$0 = 6dyd^2y + 2yd^3y$
Si prende coftante dy	$ad^3x = 0$
Si affume coftante d^2x	$0 = 6dyd^2y + 2yd^3y$
E' coftante d^2y	$ad^3x = 6dyd^2y$

119. Si potrebbero fare altre fuppofizioni, ma quefte poffono baftare per chiarirfi, che il non fupporre alcun differenziale coftante lafcia indeterminato il valor delle formole.

120. Ciò però non è generalmente vero, foggetta effendo quefta regola ad una eccezione, nel cafo cioè in cui la formola a due, o più variabili fia tale, che foftituendofi una qualfivoglia funzione d' una delle variabili in luogo delle altre, fi diftruggano, e vengano a fparire dalla formola i differenziali, poichè in allora quefti differenziali vi fi rrovano foltanto apparentemente, e la formola, in cui fi trovano quefti differenziali, ha un valore determinato, abbenchè niun dif-

differenziale ſi ſia preſo coſtante. Tale è la formola $\frac{dyd^2x - dxd^2y}{\overline{dx}^3}$: Si ponga $y = x$, e ſi avrà $dy = dx$, $d^2y = d^2x$, onde ſoſtituendo queſti valori la formola diventa $\frac{dxd^2x - dxd^2x}{\overline{dx}^3} = \frac{0}{\overline{dx}^3}$, o pure $\frac{d^2x - d^2x}{\overline{dx}^2} = \frac{0}{\overline{dx}^2}$. Si faccia $y = x^2$, e ne verrà $dy = 2xdx$, $d^2y = 2\overline{dx}^2 + 2xd^2x$, de' quali valori la ſoſtituzione rende $\frac{2xdxd^2x - 2\overline{dx}^3 - 2xdxd^2x}{\overline{dx}^3} = -2$. Sia $y = x^3$; ſarà $dy = 3x^2dx$, $d^2y = 6x\overline{dx}^2 + 3x^2d^2x$, e ſoſtituendoſi queſti valori, ne verrà $\frac{3x^2dxd^2x - 6x\overline{dx}^3 - 3x^2dxd^2x}{\overline{dx}^2} = -6x$. Sia $y = x + \sqrt{xx+a}$, ſarà

$$dy = \frac{dx\sqrt{xx+a} + xdx}{\sqrt{xx+a}},$$ e

$$d^2y = \frac{d^2x \times \overline{xx+a} + \overline{dx}^2\sqrt{xx+a} + xd^2x\sqrt{xx+a} - \frac{x^2\overline{dx}^2}{\sqrt{xx+a}}}{xx+a};$$ quindi ſoſtituendoſi queſti valori di dy, e di d^2y, ſi avrà $\frac{dxd^2x\sqrt{xx+a} + xdxd^2x}{\overline{dx}^3\sqrt{xx+a}}$

$$- \frac{dxd^2x \times \overline{xx+a} - \overline{dx}^3\sqrt{xx+a} - xdxd^2x\sqrt{xx+a} + \frac{x^2\overline{dx}^3}{\sqrt{xx+a}}}{\overline{xx+a} \times \overline{dx}^3}$$

$= \frac{-1}{\sqrt{xx+a}} + \frac{x^2}{xx+a\ \sqrt{xx+a}}$. E generalmente eſſendo y eguale a una qua-

lun-

lunque funzione di x, ſarà $dy = mdx$ (m rappreſenta una funzione di x, poichè eſſendoſi ſuppoſta y eguale a una funzione di x, con differenziarſi y vienſi a differenziare tale funzione di x, il di cui differenziale riſultando da una nuova funzione di x moltiplicata in dx, ottimamente perciò ſi rappreſenta con mdx), e $d^2y = dmdx + md^2x$, o ſia (perchè $dm = ndx$ per la ragione addotta)

$d^2y = n\overline{dx}^2 + md^2x$. Si ſoſtituiſcano pertanto nella formola

$\frac{dyd^2x - dxd^2y}{\overline{dx}^3}$ queſti valori di dy, e di d^2y, ed eſſa diverrà

$$\frac{mdxd^2x - n\overline{dx}^3 - mdxd^2x}{\overline{dx}^3} = -n.$$

121. Poichè adunque l' anzidetta formola ha un valore determinato a motivo, che apparentemente ſoltanto trovanſi in eſſa i differenziali ſecondi nella ſuppoſizione di niun differenziale primo coſtante, egli è perciò manifeſto, che ſe in una qualſivoglia quantità compleſſa ſi troveranno oltre la ſuddetta formola ſoli differenziali primi, avrà eſſa ſempre un valore fiſſo, e determinato.

122. Siccome poi ſovente i differenziali ſecondi, e più alti entrano ſoltanto apparentemente nel calcolo, darò nel ſeguente Articolo VIII. il modo, con cui ſempre da una propoſta formola eliminare ſi poſſano.

123. Prima però di terminar queſt' Articolo ripigliamo le ſerie del num. 115. per farvi ſopra alcune rifleſſioni, e dedurne altre formole opportune agli uſi in cui ſi conſiderano le differenze finite. Sia x una qualunque funzione di z, come ſarebbe $x = z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} +$ ec., e ſi ſupponga, che la z vada ſucceſſivamente acquiſtando eguali aumenti finiti eſpreſſi da z', così che i ſuoi ſucceſſivi valori ſiano z, $z+z'$, $z+2z'$, $z+3z'$, $z+4z'$ ec. Mentre la z acquiſterà queſti aumenti, la x corriſpondentemente acquiſtera i ſuoi, che ſaranno rappreſentati dalla ſerie (A) num. 115. Vale a dire eſſendo $x = z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} +$ ec. allorchè la z paſſerà ad eſſere $z+z'$, la x diverrà $x+x'$; quando la z ſi farà $z+2z'$ la x ſi muterà in $x+2x'+x''$; così quando la z ſarà $z+3z'$, la x cambierà in $x+3x'+3x''+x'''$ ec. Come ſi può vedere nel ſeguente eſempio, in cui i ſucceſſivi valori di z ſono ſegnati in L, e i corriſpondenti valori di x in M

(L) z.	$z+z'$.	$z+2z'$.	$z+3z'$.	$z+4z'$.
				x''''
			x'''	$x'''+x''''$
		x''	$x''+x'''$	$x''+2x'''+x''''$
	x'	$x'+x''$	$x'+2x''+x'''$	$x'+3x''+3x'''+x''''$
(M) x.	$x+x'$.	$x+2x'+x''$.	$x+3x'+3x''+x'''$.	$x+4x'+6x''+4x'''+x''''$.

Se si prenderanno gli aumenti infinitamente piccoli sarà $x'=dx$, $x''=d^2x$, $x'''=d^3x$, $x''''=d^4x$ $x'''''=d^5x$ ec., e la serie (M) si cambierà in x. $x+dx$ $x+2dx+d^2x$. $x+3dx+3d^2x+d^3x$. $x+4dx+6d^2x+4d^3x+d^4x$. $x+5dx+10d^2x+10d^3x+5d^4x+d^5x$ ec. Considerando pertanto come procedono questi termini, e la legge, che osservano i loro coefficienti, si scorge, che se z acquisterà un' aumento tale, che diventi $z+mz'$, il corrispondente valore di x sarà

espresso da questa formola (R) $x+mdx+\frac{m\times\overline{m-1}\times d^2x}{1.\ 2.}+$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times d^3x}{1.\ 2.\ 3.}+\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\ d^4x}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}+$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}\times d^5x}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}+$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}\times\overline{m-5}\times d^6x}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}+\text{ec.}$$

124. Finchè gli elementi dx, d^2x, d^3x ec. sono infinitamente piccoli, ed m è un numero finito, ciascuno dei termini della precedente formola è infinite volte maggiore del suo susseguente: Ma se sussistendo tuttavia infinitamente piccoli gli elementi dx, d^2x, d^3x ec., sarà m un numero infinitamente grande, in tal caso perchè [pel num. 14.] il prodotto di una quantità infinitamente piccola in una infinitamente grande è una quantità finita, ciascun termine della formola (R) sarà una quantità finita: In oltre essendo m un numero infinitamente grande, e una quantità infinita non aumentandosi, o diminuendosi con aggiungerle, o levarle una quantità finita, sarà $m\times\overline{m-1}=m^2$; $m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}=m^3$;

$m\times$

$m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} = m^4$ ec., e però la formola (R) si cambierà nella seguente (S) $x + mdx + \frac{m^2 d^2 x}{1.\ 2.} + \frac{m^3 d^3 x}{1.\ 2.\ 3.} + \frac{m^4 d^4 x}{1.2.3.4.} + \frac{m^5 d^5 x}{1.2.3.4.5.}$

$+ \frac{m^6 d^6 x}{1.2.3.4.5.6.} +$ ec.

125. Avanti di più inoltrarci in queste ricerche, discendiamo al caso particolare, e vediamo come la formola [R] anche qualora si tratta di aumenti finiti, ci dia i valori della x corrispondentemente all' aumento, che ha acquistato la z. E a tal fine sia $x = z^4 + 4z^3 - 6z^2 - 20z + 25$. Operando a norma dell' Art. IX. Cap. III. Tomo. II., e supponendo, che la $z = 1$ vada successivamente acquistando l'aumento di una unità, si avrà

Successivi valori di z		1.	2.	3.	4.	5.
					(D)	24.
				(C)	+ 84.	+ 108.
			(B)	+ 86.	+ 170.	+ 278.
		(A)	+ 5.	+ 91.	+ 261.	+ 539.
Corrispondenti valori di x.	(T)	+ 4.	+ 9.	+ 100.	+ 361.	+ 900.

Prima di tutto però determiniamo quali siano relativamente a questo esempio i valori di x, di dx, di d^2x, di d^3x ec. Adunque è $x = z^4 + 4z^3 - 6z^2 - 30z + 25 = 4$ (mentre si suppone, che sia $z = 1$): il valore di dx è $= 5$ (A), che è la differenza prima; il valore di d^2x è $= 86$ (B), che è la differenza seconda; il valore di d^3x è $= 84$ (C), che è la differenza terza; e finalmente il valore di d^4x è $= 24$ (D), che è la quarta differenza. Se pertanto si vorrà il valore, che acquista la x allora quando la z è divenuta $z + 4z' = 1 + 4$, si sostituisca nella formola (R) 4 in luogo di m, e in luogo di dx, d^2x, $d\ x$ ec. i suoi pur ora determinati valori, e ne verrà $4 + 4 \times 5 + \frac{4 \times \overline{4-1}}{1.\ 2.} \times 86 +$

$\frac{4 \times \overline{4-1} \times \overline{4-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times 84 + \frac{4 \times \overline{4-1} \times \overline{4-2} \times \overline{4-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} \times 24$, o sia

$4 + 4 \times 5 + 6 \times 86 + 4 \times 84 + 24$, vale a dire $4 + 20 + 516 + 336 + 24 = 900$, che è ap-

appunto il termine della serie (T) dei valori di x, il quale corrisponde alla z aumentata di 4, cioè corrisponde a $z=5$.

126. Ritorniamo adesso alla formola (S). Poichè nell' espressione $mz'=mdz$ si suppone dz infinitamente piccola, ed m infinitamente grande, e però mdz eguale a una quantità finita, sia n questa quantità, vale a dire $mdz=n$, da cui si prenda il valore di m, che è $m=\frac{n}{dz}$, e questo valore di m, e delle sue potestà si sostituisca nella formola (S), lo che fatto ne risulterà la seguente formola (V)

$$x+\frac{ndx}{dz}+\frac{n^2d^2x}{1.2.\overline{dz}^2}+\frac{n^3d^3x}{1.2.3.\overline{dz}^3}+\frac{n^4d^4x}{1.2.3.4\overline{dz}^4}+\frac{n^5d^5x}{1.2.3.4.5.\overline{dz}^5}+\text{ec.},$$

la quale serve a trovare in una maniera diversa da quella del preced. num. 125. il valore di x espresso da una equazione data per z, allorchè la z acquista l'aumento $mz'=n$. Servirà d'esempio l'equazione $x=z^4+4z^3-6z^2-20z+25$ del num. stesso 125. Si differenzi questa equazione, e si avrà (Γ) $dx=4z^3dz+12z^2dz-12zdz-20dz$. Questa si differenzi ancora prendendo dz costante, e ne verrà (Δ) $d^2x=12z^2\overline{dz}^2+24z\overline{dz}^2-12\overline{dz}^2$. Di nuovo questa si differenzi, e ne risulterà (Θ) $d^3x=24z\overline{dz}^3+24\overline{dz}^3$. Anche di questa si prenda la differenza, che è $d^4x=24\overline{dz}^4$ (Λ). Se per fine si vorrà differenziare quest' ultima equazione, si troverà $d^5x=0\overline{dz}^5$ (Π), e però $\frac{d^5x}{\overline{dz}^5}=0$. Dall' equazione pertanto (Γ) si ricava $\frac{dx}{dz}=4z^3+12z^2-12z-20$. Dall'equazione (Δ) si ha $\frac{d^2x}{\overline{dz}^2}=12z^2+24z-12$. Dall' equazione [Θ] si ottiene $\frac{d^3x}{\overline{dz}^3}=24z+24$. Finalmente dall'equazione (Λ) ne viene $\frac{d^4x}{\overline{dz}^4}=24$. Ora volendosi il valore di x, allorchè la z acquista l'aumento 4, sarà $n=4$: Che però sostituendosi nella formola (V) questi valori di n, di $\frac{dx}{dz}$, di $\frac{d^2x}{\overline{dz}^2}$, di $\frac{d^3x}{\overline{dz}^3}$, di $\frac{d^4x}{\overline{dz}^4}$, e di x preso dalla proposta equazione, si avrà il ricercato valore di x,

che

Digitized by Google

che trovasi essere $z^4+4z^3-6z^2-20z+25+4\times\overline{4z^3+12z^2-12z-20}$

$$+\frac{16}{1.\,2.}\times\overline{12z^2+24z-12}+\frac{64}{1.\,2.\,3.}\times\overline{24z+24}+\frac{256}{1.\,2.\,3.\,4.}\times 24=z^4+$$

$4z^3-6z^2-20z+25+16z^3+48z^2-48z-80+96z^2+192z-96+256z+256+256$, cioè

z^4	$+$	$4z^3$	$-$	$6z^2$	$-$	$20z$	$+$	25
	$+$	$16z^3$	$+$	$48z^2$	$-$	$48z$	$-$	80
			$+$	$96z^2$	$+$	$192z$	$-$	96
					$+$	$256z$	$+$	256
							$+$	256
z^4	$+$	$20z^3$	$+$	$138z^2$	$+$	$380z$	$+$	361

cercato valore, che acquista la x allorchè la z passa in $z+4$, il quale è $=1+20+138+380+361=900$ (perchè $z=1$ per ipotesi), che è lo stesso valore trovato coll'altra formola (R) al num. 125.

127. Se la z in vece di ricevere l'aumento n, ne subirà diminuzione, così che essa passi in $z-n$, in tal caso servirà ancora la formola [V] se non che si dovrà sostituire in essa $-n$ in luogo di n, lo che farà diventar negativi tutti i di lei termini, ne' quali l'esponente di n è impari, cioè a dire tutti i termini in luogo pari: Onde la formola (V) diverrà

$$(Z)\; x-\frac{n\,dx}{dz}+\frac{n^2d^2x}{1.\,2.\,\overline{dz}^2}-\frac{n^3d^3x}{1.\,2.\,3.\,\overline{dz}^3}+\frac{n^4d^4z}{1.\,2.\,3.\,4.\,\overline{dz}^4}-$$

$\dfrac{n^5d^5x}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,\overline{dz}^5}+$ ec. La lettera n, con cui si intende aumentata, o diminuita la variabile z può essere qualunque quantità costante, e può essere ancora una variabile dipendente da z, siccome può essere la stessa z, poichè nel caso particolare, a cui si fan servire le formole [V], [Z] non ha più luogo la variabilità. Sia data per esempio l'equazione $x=z^3+3z^2+5z+8$, e si debba ritrovare il valore di x espresso da un'equazione data per z, allorchè la z acquista l'aumento z, cioè a dire la z passi in $z+z$. Si differenzi l'equazione data, e si avrà [G] $dx=3z^2dz+6z\,dz+5dz$. Questa si differenzi ancora, e ne verrà (H) $d^2x=6z\,\overline{dz}^2+6\,\overline{dz}^2$. Per ultimo si differenzi anche questa, e ne risulterà

(K)

(K) $d^3x = 6\overline{dz}^3$. Dall' equazione (G) ſi ha $\frac{dx}{dz} = 3z^2 + 6z + 5$; dall' equazione [H] ne viene $\frac{d^2x}{\overline{dz}^2} = 6z + 6$; e $\frac{d^3x}{\overline{dz}^3} = 6$ dall' equazione [K]. Ora nella ſuppoſizione, che la z acquiſti l' aumento z, la formola (V) diventa [T] $x + \frac{zdx}{dz} + \frac{z^2d^2x}{1.\,2.\,\overline{dz}^2} + \frac{z^3d^3x}{1.\,2.\,3.\,\overline{dz}^3} + \frac{z^4d^4x}{1.\,2.\,3.\,4\,\overline{dz}^4} +$ ec. Quindi ſe in queſta formola ſi ſoſtituiranno i valori di x, di $\frac{dx}{dz}$, di $\frac{d^2x}{\overline{dz}^2}$ ec. ſi troverà $z^3 + 3z^2 +$

$5z + 8 + z \times \overline{3z^2 + 6z + 5} + \frac{z^2}{1.\,2.} \times \overline{6z + 6} + \frac{z^3}{1.\,2.\,3.} \times 6 = z^3 + 3z^2 + 5z +$ $8 + 3z^3 + 6z^2 + 5z + 3z^3 + 3z^2 + z^3$, cioè

$$\begin{array}{l} z^3 + 3z^2 + 5z + 8 \\ 3z^3 + 6z^2 + 5z \\ 3z^3 + 3z^2 \\ z^3 \\ \hline 8z^3 + 12z^2 + 10z + 8 \end{array}$$

cercato valore, che ſubiſce la z, allorchè eſſa acquiſta l' aumento z. Che ſe la z in vece di paſſare in $z+z$, paſſerà in $z-z=0$, che è lo ſteſſo, che porre zero in luogo di z nell' equazione, biſognerà prevalerſi della formola [Z], la quale ſi cambia in [Y] $x - \frac{zdx}{dz} + \frac{z^2d^2x}{1.\,2.\,\overline{dz}^2} - \frac{z^3d^3x}{1.\,2.\,3.\,\overline{dz}^3} + \frac{z^4d^4x}{1.\,2.\,3.\,4\,\overline{dz}^4} -$ ec., in cui ſi ſoſtituiſcano gli antecedenti valori di x, $\frac{dx}{dz}$, $\frac{d^2x}{\overline{dz}^2}$, $\frac{d^3x}{\overline{dz}^3}$ ec., dal che ſi avrà

z^3

Digitized by Google

$$z^3+3z^2+5z+8-z\times\overline{3z^2+0z+5}+\frac{z^2}{1.\,2.}\times\overline{6z+6}-\frac{z^3}{1.\,2.\,3.}\times 6=z^3+$$

$3z^2+5z+8-3z^3-6z^2-5z+3z^3+3z^2-z^3$, cioè

$$\begin{array}{r} z^3+3z^2+5z+8 \\ -3z^3-6z^2-5z \\ +3z^3+3z^2 \\ -z^3 \\ \hline +8 \end{array}$$

cercato valore, che acquista la x allorchè la z passa in $z-z=0$.

128. Supponiamo adesso, che x, X', X'', X''', X'''' ec. rappresentino i termini della serie [M] num. 123, vale a dire sia $x+x'=X'$; $x+2x'+x''=X''$: $x+3x'+3x''+x'''=X'''$; $x+4x'+6x''+4x'''+x''''=X''''$ ec.; e supponiamo in oltre, che X' sia il valore, che acquista la x allorchè la z passa

in $z+n$, cioè a dire sia $X'=x+\frac{ndx}{dz}+\frac{n^2d^2x}{1.\,2.\,dz^2}+\frac{n^3d^3x}{1.\,2.\,3.\,dz^3}+$ ec.,

egli è evidente per le cose dette, che essendo $n=1$, sarà

$$X''=x+\frac{2ndx}{dz}+\frac{4n^2d^2x}{1.\,2.\,dz^2}+\frac{8n^3d^3x}{1.\,\,2.\,\,3.\,dz^3}+\frac{16n^4d^4x}{1.\,2.\,3.\,4\,dz^4}+\text{ ec.}$$

$$X'''=x+\frac{3ndx}{dz}+\frac{9n^2d^2x}{1.\,2.\,dz^2}+\frac{27n^3d^3x}{1.\,2.\,3.\,dz^3}+\frac{81n^4d^4x}{1.\,2.\,3.\,4.\,dz^4}+\text{ ec.}$$

$$X''''=x+\frac{4ndx}{dz}+\frac{16n^2d^2x}{1.\,2.\,dz^2}+\frac{64n^3d^3x}{1.\,2.\,3.\,dz^3}+\frac{256n^4d^4x}{1.\,2.\,3.\,4.\,dz^4}+\text{ ec.}$$

$$X'''''=x+\frac{5ndx}{dz}+\frac{25n^2d^2x}{1.\,2.\,dz^2}+\frac{125n^3d^3x}{1.\,2.\,3.\,dz^3}+\frac{625n^4d^4x}{1.\,2.\,3.\,4.\,dz^4}+\text{ ec.}$$

e così in seguito, poichè si ha X'' allora quando la z acquista l'aumento $2n$, X''' quando alla z si dà l'aumento $3n$ ec.

129.

129. Ma ſe ſarà $n=2$, in tal caſo tutti i ſucceſſivi aumenti di z dovendo eſſere eguali, cioè 2, 4. 6, 8 ec;, i termini x, X', X'', X''' ec. della ſerie, che dà i valori di x corriſpondenti agli aumenti di z procederanno interpolatamente riſpetto ai precedenti termini nati dalla ſuppoſizione di $n=1$, cioè a dire queſta ſerie darà il primo, il terzo, il quinto, il ſettimo ec. termine della precedente ſerie: che ſe ſarà $n=3$, in tal caſo i valori x, X', X'', X''' ec. daranno il primo, il quarto, il ſettimo, il decimo ec. termine della ſerie nata nella ſuppoſizione di $n=1$. Parimente ſe ſarà $n=4$; la ſerie che colle precedenti f rmole ſi troverà, darà i termini primo, quinto, nono, decimo terzo ec. della anzidetta ſerie: Onde ſe nella ſuppoſizione di $n=1$ ſaranno a, b, c, d, e, f, g ec. i termini eſibiti dai valori di x, X', X'', X''', X'''', nella ſuppoſizione di $n=2$ corriſponderà x ad a, X' a c, X'' ad e ec., nella ſuppoſizione di $n=3$ corriſponderà x ad a, X' a d, X'' a g ec.

130. Per maggior chiarezza vediamolo in fatto. Sia $x=z^2+3z+2$, e ſupponiamo, che la $z=2$ vada acquiſtando ſucceſſivi aumenti, ognuno de' quali ſia eguale all' unità. In una tale ipoteſi i valori di x ſaranno i ſeguenti eſibiti dalla ſerie [Y]

Eſempio preſo dall' equazione $x=z^2+3z+2$

Succeſſivi valori di z		2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
		2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.
		6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.
[Y]	+	12.	20.	30.	42.	56.	72.	90.	110.

Poichè adunque il valore, che da bel principio ha la z è 2, egli è $x=z^2+3z+2=12$. Prima di ſervirci delle formole X', X'', X''' ec. troviamo mediante l'equazione propoſta i valori di $\frac{dx}{dz}$, e di $\frac{d^2x}{\overline{dz}^2}$. Si differenzi l' equazione data, e ſi avrà $dx=2zdz+3dz$ (M), che differenziata ancora rende [N] $d^2x=2\overline{dz}^2$ (ſi ſuppone dz coſtante). Dall'equazione (M) ſi deduce $\frac{dx}{dz}=2z+3$, e dall' equazione (N) ſi ha $\frac{d^2x}{\overline{dz}^2}=2$. Poſto ciò ſia $n=1$, e il valore di X' ſarà $z^2+3z+2+2z+3+\frac{2}{2}=20$ (perchè $z=2$), che è il ſecondo ter-

mi-

mine della serie [Y]: il valore di X'' sarà $z^2+3z+2+2\times\overline{2z+3}+\frac{4}{1.\,2.}\times 2$ $=30$, che è il terzo termine della serie: il valore di X''' è $z^2+3z+2+3\times\overline{2z+3}+\frac{9}{1.\,2.}\times 2=42$, che è il quarto termine della serie: il valore di X'''' è $z^2+3z+2+4\times\overline{2z+3}+\frac{16}{1.\,2.}\times 2=56$ quinto termine della serie [Y] ec. Supponiamo ora $n=2$: il valore di X' sarà $z^2+3z+2+2\times\overline{2z+3}+\frac{4}{1.\,2.}\times 2=30$, che è il terzo termine della serie [Y]: il valore di X'' è $z^2+3z+2+4\times\overline{2z+3}+\frac{16}{1.\,2.}\times 2=56$, che è il quinto termine della serie [Y]: il valore di X''' è $z^2+3z+2+6\times\overline{2z+3}$ $+\frac{36}{1.\,2.}\times 2=90$, che è il settimo termine della serie ec. Supponiamo in terzo luogo $n=3$: il valore di X' sarà $z^2+3z+2+3\times\overline{2z+3}+\frac{9}{1.\,2.}\times 2$ $=42$, che è il quarto termine della serie [Y]: il valore di X'' sarà z^2+3z $+2+6\times\overline{2z+3}+\frac{36}{1.\,2.}\times 2=90$ settimo termine della serie [Y] ec.

131. Abbiamo adunque le formole esibentici come ci piace i valori di x corrispondenti agli aumenti, che subisce la z, i quali valori sono in generale i termini della serie [M] num. 123., che per brevità abbiamo chiamati x, X', X'', X''', X'''', X''''' ec.. Ritenendo queste espressioni, si è veduto al num. 103. come vengano espresse le loro differenze, e le differenze delle differenze, cioè le differenze prime, seconde, terze ec., che sono come segue

		(E) $X'''' - 4X''' + 6X'' - 4X' + x$		
	(D) $X''' - 3X'' + 3X' - x$		$X'''' - 3X''' + 3X'' - X'$	
(C) $X'' - 2X' + x$		$X''' - 2X'' + X'$		$X'''' - 2X''' + X''$
(B) $X' - x$	$X'' - X'$		$X''' - X''$	$X'''' - X'''$
(A) x.	X'	X''	X'''	X''''.

Se adunque si sottrerà x da X', si avrà $X' - x$ (B), che chiamo D. x, cioè la differenza prima di x; così $X'' - 2X' + x$ chiamo $D^2.x$, vale a dire differenza seconda di x, parimente $X''' - 3X'' + 3X' - x$ dico $D^3.x$, che vuol dire differenza terza di x, e nello stesso modo $X'''' - 4X''' + 6X'' - 4X' + x$ esprimo con $D^4.x$, che rappresenta la differenza quarta di x.

132. Ciò premesso cerchiamo adesso le formole generali, che somministrano ciascun termine delle differenze prime, seconde, terze ec. dei valori, che la funzione x acquista allorchè la z dal primo aumento n passa susseguentemente agli altri. Quì si riprendano i valori di X', X'', X''', X'''' ec. trovati al num. 128., e successivamente si sottraggano l'uno dall'altro, e con ciò si avranno le formole, che danno i termini della serie [B] num. 131. Ecco il calcolo.

$$X' = x + \frac{ndx}{dz} + \frac{n^2d^2x}{2\,dz^2} + \frac{n^3d^3x}{6\,dz^3} + \frac{n^4d^4x}{24\,dz^4} + \text{ec.}$$

$$x = x$$

$$[K]\ X' - x = D.x = \frac{ndx}{dz} + \frac{n^2d^2x}{2\,dz^2} + \frac{n^3d^3x}{6\,dz^3} + \frac{n^4d^4x}{24\,dz^4} + \text{ec., che}$$

è la formola, la quale dà il primo termine della serie (B).

X''

$$X'' = x + \frac{2ndx}{dz} + \frac{4n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{8n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{16n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \text{ec.}$$

$$X' = x + \frac{ndx}{dz} + \frac{n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \text{ec.}$$

$$[F]\ X'' - X' = \frac{ndx}{dz} + \frac{3n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{7n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{15n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \text{ec., che}$$

è la formola, la quale dà il secondo termine della serie [B].

$$X''' = x + \frac{3ndx}{dz} + \frac{9n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{27n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{81n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \text{ec.}$$

$$X'' = x + \frac{2ndx}{dz} + \frac{4n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{8n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{16n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \text{ec.}$$

$$[G]\ X''' - X'' = \frac{ndx}{dz} + \frac{5n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{19n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{65n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \text{ec., che}$$

è la formola, la quale dà il terzo termine della serie [B].

$$X'''' = x + \frac{4ndx}{dz} + \frac{16n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{64n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{256n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \text{ec.}$$

$$X''' = x + \frac{3ndx}{dz} + \frac{9n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{27n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{81n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \text{ec.}$$

$$[H]\ X'''' - X''' = \frac{ndx}{dz} + \frac{7n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{37n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{175n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \text{ec., che}$$

è la formola, la quale dà il quarto termine della serie (B), e nello stesso modo si troveranno le formole esibenti i susseguenti termini.

133. Passiamo adesso a cercare le formole, che danno i termini della serie (C) mediante il sottrarre una dall'altra le ritrovate precedenti formole E, F, G, H. Ecco il calcolo.

$$\text{(F)}\ X'' - X' = \frac{ndx}{dz} + \frac{3n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{7n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{15n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{31n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$\text{(K)}\ X' - x = \frac{ndx}{dz} + \frac{n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$\text{(P) (F—K)}\ X'' - 2X' + x = D^2.x =$$

$$\frac{2n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{6n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{14n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{30n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.,}$$ che è la formola, la quale dà il primo termine della serie (C).

$$\text{(G)}\ X''' - X'' = \frac{ndx}{dz} + \frac{5n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{19n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{65n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{211n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$\text{(F)}\ X'' - X' = \frac{ndx}{dz} + \frac{3n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{7n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{15n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{31n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$\text{(Q) (G — F)}\ X''' + 2X'' + X' =$$

$$\frac{2n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{12n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{50n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{180n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.,}$$ che è la formola, la quale dà il secondo termine della serie (C).

(H)

$$(H)\ X'''' - X''' = \frac{ndx}{dz} + \frac{7n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{37n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{175n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{781n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$(G)\ X''' - X'' = \frac{ndx}{dz} + \frac{5n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{19n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{65n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{211n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$(R)\ (H - G)\ X'''' - 2X''' + X'' =$$

$$\frac{2n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{18n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{110n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{570n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.},$$

che è la formola, la quale dà il terzo termine della ferie [C], e nello fteffo modo fi troveranno le formole efibenti gli altri fuffeguenti termini.

134. Intanto cerchiamo le formole, che fomminiftrano i termini della ferie [D] mediante il fottrarre una dall'altra le ritrovate precedenti formole P, Q, R.

$$(Q)\ X''' - 2X'' + X' = \frac{2n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{12n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{50n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{180n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$(P)\ X'' - 2X' + x = \frac{2n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{6n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{14n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{30n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$(X)\ (Q - P)\ X''' - 3X'' + 3X' - x = D^3.x =$$

$\frac{6n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{36n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{150n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$, che è la formola, la quale dà il primo termine della ferie (D).

(R)

$$(R)\ X'''' - 2X''' + X'' = \frac{2n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{18n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{110n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{570n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$(Q)\ X''' - 2X'' + X' = \frac{2n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2} + \frac{12n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{50n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{180n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$(Z)\ (R - Q)\ X''' - 3X'' + 3X' - X =$$

$\frac{6n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{60n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{390n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5}$ + ec., che è il ſecondo termine della ſerie (D). Iſteſſamente ſi deducano le formole per gli altri termini.

135. Proſeguendo le operazioni collo ſteſſo metodo ſi troveranno in ſeguito le formole, che danno i termini della ſerie [E] mediante il ſottrarre una dall'altra le ritrovate precedenti formole X, Z, ec.

$$(Z)\ X'''' - 3X''' + 3X'' - X' = \frac{6n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{60n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{390n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$(X)\ X''' - 3X'' + 3X' - x = \frac{6n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3} + \frac{36n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4} + \frac{150n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.}$$

$$(T)\ (Z - X)\ X'''' - 4X''' + 6X'' - 4X' + x = D^4.x = \frac{n^4d^4x}{\overline{dz}^4} + \frac{240n^5d^5x}{120\,\overline{dz}^5} + \text{ec.,}$$

che è la formola, la quale dà il primo termine della ſerie (E). Nello ſteſſo modo ſi trovino le formole per gli altri ſuſſeguenti termini di queſta ſerie (E), e così in poi pei termini delle altre ſerie delle differenze più alte.

136. Siccome ho chiamati al num. 128. X', X'', X''', X'''' ec., i valori di x corriſpondenti ai ſucceſſivi aumenti, che riceve la z, così chiamerò X⁻', X⁻'', X⁻''', X⁻'''' ec., (i ſegni negativi prefiſſi agli apici non ſervono ad altro, che a indicare, che queſti ſono i valori di x corriſpondenti alla z, che va ſucceſſivamente diminuendoſi) i valori di x, che naſcono, allorchè la z patiſce ſucceſſive diminuzioni. Chiamandoſi n la quantità, di cui ſi va diminuendo la z, mentre acquiſta i ſeguenti valori $z-n$, $z-2n$, $z-3n$, $z-4n$ ec., egli è manifeſto, che i valori di X⁻', X⁻'', X⁻''', X⁻'''' ec., ſono gli ſteſſi, che i valori di X', X'', X''', X'''' ec., ſe non che in luogo di n ſi deve ſoſtituire ne'medeſimi $-n$ come coſta dal num. 127.. Ciò facendo ſi avranno i ſeguenti valori di X⁻', X⁻'', X⁻''', X⁻'''' ec.

X⁻

$$X^{-} = x - \frac{ndx}{dz} + \frac{n^2d^2x}{1.2.\overline{dz}^2} - \frac{n^3d^3x}{1.2.3.\overline{dz}^3} + \frac{n^4d^4x}{1.2.3.4.\overline{dz}^4} - \text{ec.}$$

$$X^{-\prime} = x - \frac{2ndx}{dz} + \frac{4n^2d^2x}{1.2.\overline{dz}^2} - \frac{8n^3d^3x}{1.2.3.\overline{dz}^3} + \frac{16n^4d^4x}{1.2.3.4.\overline{dz}^4} - \text{ec.}$$

$$X^{-\prime\prime} = x - \frac{3ndx}{dz} + \frac{9n^2d^2x}{1.2.\overline{dz}^2} - \frac{27n^3d^3x}{1.2.3.\overline{dz}^3} + \frac{81n^4d^4x}{1.2.3.4.\overline{dz}^4} - \text{ec.}$$

$$X^{-\prime\prime\prime} = x - \frac{4ndx}{dz} + \frac{16n^2d^2x}{1.2.\overline{dz}^2} - \frac{64n^3d^3x}{1.2.3.\overline{dz}^3} + \frac{256n^4d^4x}{1.2.3.4.\overline{dz}^4} - \text{ec.}$$

137. Qualora si volesse la formola esprimente la somma di un proposto qualunque numero di questi termini x, X^{-}, $X^{-\prime}$, $X^{-\prime\prime}$ ec., essa sarà facile da trovarsi, bastando osservare come procedono i termini delle corrispondenti serie. Sia $p+1$ il numero de' termini da sommarsi, onde il termine, che corrisponde a $z-pn$ sarà $x - \frac{pndx}{dz} + \frac{p^2n^2d^2x}{2\overline{dz}^2} - \frac{p^3n^3d^3x}{6\overline{dz}^3} +$ ec.. Posto ciò egli è manifesto, che la somma de' primi termini x delle predette serie è $= \overline{p+1} \times x$; la somma de' secondi termini è $- \frac{ndx}{dz} \times \overline{1+2+3\ldots+p}$; la somma de' terzi termini è $+ \frac{n^2d^2x}{2\overline{dz}^2} \times \overline{1+4+9+16\ldots+p^2}$; la somma de' quarti termini è

—

$-\frac{n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3}\times\overline{1+8+27+64\ldots+p^3}$ + ec. Dunque la cercata formola sommatoria è $\overline{p+1}\times x-\frac{ndx}{dz}\times\overline{1+2+3\ldots+p}+\frac{n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2}\times\overline{1+4+9+16\ldots+p^2}$

$-\frac{n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3}\times\overline{1+8+27+64\ldots+p^3}$ + ec., o sia

$$\overline{p+1}\times x-\frac{ndx}{dz}\times\overline{\tfrac{1}{2}p^2+\tfrac{1}{2}p}+\frac{n^2d^2x}{2\,\overline{dz}^2}\times\overline{\tfrac{1}{3}p^3+\tfrac{1}{2}p^2+\tfrac{1}{6}p}-$$

$$\frac{n^3d^3x}{6\,\overline{dz}^3}\times\overline{\tfrac{1}{4}p^4+\tfrac{1}{2}p^3+\tfrac{1}{4}p^2}+\frac{n^4d^4x}{24\,\overline{dz}^4}\times\overline{\tfrac{1}{5}p^5+\tfrac{1}{2}p^4+\tfrac{1}{3}p^3-\tfrac{1}{30}p}-\text{ec.}$$

poichè (pel num. 919. Tomo II.) la somma dei termini naturali $1+2+3+4\ldots+p$ è $\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p$: Pel num. 800. dello stesso Tomo la somma di questa serie $1+4+9+16\ldots+p^2$ è $\frac{1}{3}p^3+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{6}p$: Pel num. 796. la somma della serie $1+8+27+64\ldots+p^3$ è $\frac{1}{4}p^4+\frac{1}{2}p^3+\frac{1}{4}p^2$ ec.. Lo stesso si faccia rispetto ai termini x, X', X'', X''' ec., del num. 128.

AR-

ARTICOLO VII.

Della maniera di differenziare le funzioni inesplicabili.

138. Col nome di funzioni inesplicabili chiama il Sig. Eulero, cui oltre tante altre scoperte siamo debitori di questa parte di calcolo, quelle funzioni, che non si assoggettano ad alcuna espressione determinata: Tale è la somma di questa serie,

$$\begin{matrix} 1. & & 2. & & 3. & & 4. & & 5 & \ldots\ldots & x \\ A & + & B & + & C & + & D & + & E & +\ldots & +X \end{matrix}$$

(le lettere A, B, C ec. esprimono i termini della serie, e i numeri 1, 2, 3, 4 .... x ne sono gli esponenti), che avendo $\frac{1}{z}$ per termine generale diventa

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots+\frac{1}{z}$; che se sarà $\frac{1}{2z-1}$ il termine generale, essa risulterà $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\ldots+\frac{1}{2z-1}$; ovvero sarà

$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{z^3}$, se il termine generale è $\frac{1}{z^3}$ ec.:

Poichè la somma di queste serie non si può rappresentare con alcuna formola finita, perciò $S=A+B+C+D+\ldots\ldots+X$ (la lettera S esprime la somma), il di cui termine generale sia $\frac{1}{3z-2}$, è una funzione inesplicabile di z.

139. Per differenziare queste funzioni inesplicabili, bisogna trovare il valore, che acquistano, allorchè la variabile x subisce un qualche aumento, come quando la x passa in $x+n$: Per esempio essendo

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1. & & 2. & & 3. & & 4 \;\ldots\ldots & x \\ S = & A & + & B & + & C & + & D + \ldots\ldots + & X \end{array}$$

la funzione propoſta, ſia Σ il valore, al quale paſſa la S, qualora in vece di x ſi prende $x+n$. I termini della ſerie, cui competono gli indici $x+1$, $x+2$, $x+3$ ec. ſiano X', X'', X''' ec., cioè

$$\begin{array}{ccccccccc} x+1 & & x+2 & & x+3 & & x+4 \ldots\ldots\ldots & & x+\infty \\ X' & + & X'' & + & X''' & + & X'''' + \ldots & + & X^{\infty} \end{array}$$

(il ſegno ∞ denota l'infinito); e chiamandoſi Z il termine della ſerie, cui compete l'indice $x+n$, ſiano Z', Z'', Z''' ec., i termini della ſerie, che hanno $x+n+1$, $x+n+2$, $x+n+3$ ec. per indici, vale a dire

$$\begin{array}{ccccccccc} x+n+1. & & x+n+2. & & x+n+3. & & x+n+4 \ldots\ldots & & x+n+\infty \\ Z' & + & Z'' & + & Z''' & + & Z'''' + \ldots & + & Z^{\infty} \end{array}$$

Sia in oltre $S' = S + X'$; $S'' = S + X' + X''$; $S''' = S + X' + X'' + X'''$; ..... $S^{\infty} = S + X' + X'' + X''' + X'''' + \ldots\ldots + X^{\infty}$; ed $\Sigma' = \Sigma + Z'$; $\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$; $\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$; ..... $\Sigma^{\infty} = \Sigma + Z' + Z'' + Z''' + Z'''' + \ldots\ldots + Z^{\infty}$.

140. Quantunque tutto ciò ſia per ſe evidente, pure per maggior chiarezza riduciamolo al caſo particolare, e per evitare l'imbarazzo delle frazioni, ſerviamoci di una ſerie, i di cui termini ſiano interi, quale è la ſeguente

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. & 9. & 10. & 11. & 12. \\ 1. + & 4. + & 9. + & 16. + & 25. + & 36. + & 49. + & 64. + & 81. + & 100. + & 121. + & 144 \text{ ec.} \end{array}$$

Sia a cagion d'eſempio $x=6$, onde S eſprimerà la ſomma di ſei termini di queſta ſerie, cioè $S = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$. Di più ſia $n=2$, onde $x+n = 6+2 = 8$; che però Σ denoterà la ſomma di otto termini della detta ſerie, vale a dire $\Sigma = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204$. Quindi ſarà $X' = 49$, $X'' = 64$, $X''' = 81$, $X'''' = 100$, $X''''' = 121$ ec., è $Z' = 81$, $Z'' = 100$, $Z''' = 121$, $Z'''' = 144$ ec.; così $S' = 91 + 49 = 140$; $S'' = 91 + 49 + 64 = 204$; $S''' = 91 + 49 + 64 + 81 = 285$; $S'''' = 91 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385$ ec., ed $\Sigma' = 204 + 81 = 285$; $\Sigma'' = 204 + 81 + 100 = 385$; $\Sigma''' = 204 + 81 + 100 + 121 = 506$; $\Sigma'''' = 204 + 81 + 100 + 121 + 144 = 650$ ec.

141. Una coſa deveſi oſſervare, che la formola (Q) $x + ndx +$

$$\frac{n \times \overline{n-1}}{1.\;2.} \times d^2x + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.\;2.\;3.} \times d^3x + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}}{1.\;2.\;3.\;4} \times d^4x +$$

$\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \overline{n-4}}{1. \; 2. \; 3. \; 4. \; 5.} \times d^5x$ ec. trovata al num. 123. non ſolo eſibiſce i termini della ſerie (M) x; $x+dx$; $x+2dx+d^2x$; $x+3dx+3d^2x+d^3x$; $x+4dx+6d^2x+4d^3x+d^4x$; $x+5dx+10d^2x+10d^3x+5d^4x+d^5x$ ec.; ma in oltre ſerve a trovare la ſomma di un numero n di termini di una qualunque ſerie algebraica, o geometrica, de' quali termini ſia dato il primo, e un numero n di differenze delle differenze, ſe tante ne ha la ſerie; che ſe il numero n ſarà maggiore del numero delle differenze delle differenze, che riceve la ſerie, come ſe foſſe $n=6$, e la ſerie non ammetteſſe, che le differenze prime, ſeconde, e terze, in tal caſo baſta che ſiano date le differenze ſoltanto, che ſubiſce la ſerie, come ſi potrà oſſervare nei ſeguenti eſempj). Per un tal caſo riduco la detta formola alla forma ſeguente (R) $x+nA+\frac{n \times \overline{n-1}}{1. \; 2.}dx+\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1. \; 2. \; 3.}d^2x+$ ec., in cui la lettera n eſprime il numero de' termini da ſommarſi; la lettera A indica il primo de' detti termini; dx eſprime la differenza prima, che paſſa cioè tra il termine A, e il ſuo ſuſſeguente; d^2x rappreſenta la differenza ſeconda, che paſſa cioè tra le due differenze prime ec., come ſi potrà oſſervare ne' tre ſeguenti eſempj. E primieramente debbaſi trovare la ſomma di queſti cinque termini 25, 36, 49, 64, 81, che danno una ſerie algebraica, le di cui differenze ſeconde ſono coſtanti. Diſpongo come ſegue queſti termini colle ſole differenze, che devono ſervire al biſogno.

Differenze ſeconde.			2.		
Differenze prime.		11.	13.		
Termini dati.	25.	36.	49.	64.	81.

Nella formola [R] pertanto rigettando il termine x ſi ſoſtituiſca 5 in luogo di n, il primo termine 25 in luogo di A, la prima differenza 11 in vece di dx, e la ſeconda differenza 2 in luogo di d^2x, e fatto ciò ſi avrà

$$5 \times 25+\frac{5 \times \overline{5-1}}{1. \; 2.} \times 11+\frac{5 \times \overline{5-1} \times \overline{5-2}}{1. \; 2. \; 3.} \times 2=255,$$ che è la ſomma cercata

de' propoſti cinque termini. Il termine x, che ſi è ommeſſo rappreſenta la ſomma di tutti i termini, che precedono i già dati: Onde nella formola (R) deveſi ritenere il termine x qualora ſi voglia rappreſentare la ſomma non ſolo de' termini propoſti, ma eziandio di tutti gli altri, che li precedono, cominciando dal minimo della ſerie: Come nell'addotto eſempio i termini dati eſſendo preceduti da queſti 1, 4, 9, 16, de' quali la ſomma è 30, ſe ſi vorrà, che la formola (R) oltre la ſomma de' termini dati 25, 36, 49, 64, 81 rappreſenti ancora la ſomma di queſti 1, 4, 9, 16, ſi dovrà ritenere il termine x, che in tal caſo ſarà $=30$, nel

K 2 qual

qual modo la formola $x + nA + \frac{n \times \overline{n-1}}{1.\ 2.} \times dx + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times d^2x$ esibirà l' intera somma, che è $30 + 5 \times 25 +$ $\frac{5 \times \overline{5-1}}{1.\ 2.} \times 11 + \frac{5 \times \overline{5-1} \times \overline{5-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times 2 = 285$.

142. Prendiamo il secondo esempio da una serie, i di cui termini siano frazioni, della qual serie siano dati i tre seguenti termini $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$. Per trovare mediante la formola (R) la somma di questi tre termini, si determinino come segue le differenze, che devono servire al bisogno

Differenze seconde		$+\frac{1}{30}$	
Differenze prime	$-\frac{1}{12}$		$-\frac{1}{20}$
Termini dati	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Adunque nella formola (R) si sostituisca 3 in luogo di n, $\frac{1}{3}$ in vece di A, $-\frac{1}{12}$ in vece di dx, e $+\frac{1}{30}$ in luogo di d^2x, e fatto ciò si avrà [ommettendo al solito il termine x] $3 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \times \frac{3 \times \overline{3-1}}{1.\ 2.} +$ $\frac{3 \times \overline{3-1} \times \overline{3-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times \frac{1}{30} = \frac{47}{60}$.

143. Il terzo esempio si desuma da una serie geometrica, e si debba trovare la somma di questi quattro termini 16, 64, 256, 1024. Si prendano le differenze nel modo solito, arrestandosi a quelle differenze, il di cui grado viene indicato da $n-1$, poichè nella formola (R) va a zero il termine, in cui entra $d^n x$, e ciò facendo si avrà

Dif-

Differenze terze				+ 432.
Differenze feconde			+ 144	+ 576.
Differenze prime		+ 48	+ 192	+ 768.
Termini dati	16	64	256	1024

Nella formola [R] pertanto fi foftituifca 4 in luogo di n, 16 in vece di A, 48 in vece di dx, 144 in luogo di d^2x, e 432 in cambio di d^3x, e con ciò la formola fi cambierà in [ommettendo il termine x, che non ha luogo]

$$4 \times 16 + \frac{4 \times \overline{4-1}}{1.\ 2.} \times 48 + \frac{4 \times \overline{4-1} \times \overline{4-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times 144 +$$

$$\frac{4 \times \overline{4-1} \times \overline{4-2} \times \overline{4-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} \times 432 = 1360$$ fomma cercata.

144. Ciò pofto veniamo al modo di differenziare una propofta funzione inefplicabile $\overset{1.}{S} = \overset{2.}{A} + \overset{3.}{B} + \overset{4.}{C} + D + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$. Poichè col foftituire $x+n$ in luogo di x, la funzione S paffa in Σ, ed Σ [come cofta ancora dal num. 140.] contiene al di fopra di S la fomma di altrettanti fuffeguenti termini dopo l'efponente x, quanti vengono indicati da n, fe ad Σ fi aggiungeranno i termini $Z', Z'', Z''', \ldots\ Z^{\infty}$, e parimente ad S fi aggiungeranno i termini $X', X'', X''', \ldots\ X^{\infty}$, farà $\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + Z'''' + \ldots + Z^{\infty} = S + X' + X'' + X''' + X'''' + \ldots + X^{\infty}$ più la fomma di altrettanti termini dopo X^{∞}, quanti vengono indicati da n, cioè più la fomma de' termini $X^{\infty+1}, X^{\infty+2}, \ldots\ X^{\infty+n}$: Ma la fomma di quefti termini viene rapprefentata da $nA + \frac{n \times \overline{n-1}}{1.\ 2.} \times dx + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times d^2x +$ ec.; dunque fi ha la feguente equazione $\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z^{\infty} =$

$$S + nA + \frac{n \times \overline{n-1}}{1.\ 2.} \times dx + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times d^2x + \text{ec.} + X' + X'' +$$

$X''' + \ldots + X^{\infty}$. Tanti termini poi della formola (R) hanno luogo, quanti fono gli ordini delle differenze, che ammette la propofta funzione da differenziarfi. O pure quanti ne indica il numero n, fe egli è minore del numero degli ordini delle differenze. Quindi dalla ritrovata equazione fi ricava

$$(Q)\ \Sigma - S = nA + \frac{n \times \overline{n-1}}{1.\ 2.} \times dx + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times d^2x + \text{ec.}$$
$$+ X' + X'' + X''' + \ldots + X^{\infty}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - \ldots - Z^{\infty}.$$

Che se n sarà infinitamente piccola, sarà $\Sigma - S = d\,S$ il cercato differenziale della proposta funzione.

145. Riflettendo a quanto si è detto ai num. 141, 142., 143., si rileverà, che nella formola (R) A rappresenta il termine $X^{\infty+1}$, dx esprime la differenza, che passa tra $X^{\infty+2}$, ed $X^{\infty+1}$; d^2x indica la differenza, che passa tra la differenza $X^{\infty+3} - X^{\infty+2}$, e la differenza $X^{\infty+2} - X^{\infty+1}$ ec.. Ora in qualsivoglia serie un qualunque termine risulta dal primo termine più l' aggregato delle differenze di tutti i termini intermedj; e (pel num. 131.) le differenze prime vengono rappresentate da $X'' - X'$, $X''' - X''$, $X'''' - X'''$, $X''''' - X''''$ ec., le differenze seconde da $X''' - 2X'' + X'$, $X'''' - 2X''' + X''$, $X''''' - 2X'''' + X'''$, $X'''''' - 2X''''' + X''''$ ec.; le differenze terze da $X'''' - 3X''' + 3X'' - X'$, $X''''' - 3X'''' + 3X''' - X''$, $X'''''' - 3X''''' + 3X'''' - X'''$, $X''''''' - 3X'''''' + 3X''''' - X''''$ ec. ec.. Dunque se nella formola (R) si sostituiranno in luogo di A, di dx, di d^2x i loro valori espressi dalle differenze, essa acquisterà la seguente forma

$$nX' + n\left\{\begin{matrix} + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots + X^{\infty+1} \\ - X' - X'' - X''' - X'''' - \ldots - X^{\infty} \end{matrix}\right\}$$

$$+ \frac{n \times \overline{n-1}}{1.\ 2.} \times \overline{X'' - X'} + \frac{n \times \overline{n-1}}{1.\ 2.}\left\{\begin{matrix} + X''' + X'''' + X''''' + \ldots + X^{\infty+2} \\ - 2X'' - 2X''' - 2X'''' - \ldots - 2X^{\infty+1} \\ + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{\infty} \end{matrix}\right\}$$

$$+ \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.} \times \overline{X'''' - 2X''' + X''} + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\left\{\begin{matrix} + X'''' + X''''' \ldots + X^{\infty+3} \\ - 3X''' - 3X'''' \ldots - 3X^{\infty+2} \\ + 3X'' + 3X''' \ldots + 3X^{\infty+1} \\ - X' - X'' \ldots - X^{\infty} \end{matrix}\right\} \text{ec.}$$

146.

146. In oltre a norma del num. 126. è $-Z = -X' - \frac{ndX'}{dx} - \frac{n^2 d^2 X'}{2\,\overline{dx}^2}$ $- \frac{n^3 d^3 X'}{6\,\overline{dx}^3}$ — ec.; $-Z' = -X'' - \frac{ndX''}{dx} - \frac{n^2 d^2 X''}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3 d^3 X''}{6\,\overline{dx}^3}$ — ec.; $-Z'' = -X''' - \frac{ndX'''}{dx} - \frac{n^2 d^2 X'''}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3 d^3 X'''}{6\,\overline{dx}^3}$ — ec.; $-Z''' = -X'''' - \frac{ndX''''}{dx} - \frac{n^2 d^2 X''''}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3 d^3 X''''}{6\,\overline{dx}^3}$ — ec. ec. Quindi se nell'equazione [Q] si sostituiranno questi valori di $-Z$, $-Z'$, Z'' ec., e i poc'anzi trovati valori di nA, $\frac{n \times \overline{n-1}}{1.\ 2.} \times dx$, $\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-1}\, dx}{1.\ 2.\ 3.}$ ec., si avrà finalmente il differenziale completo della proposta funzione inesplicabile,

$$\begin{matrix} & 1. & & 2. & & 3. & & 4 & \dots & x. \\ S = & A & + & B & + & C & + & D & + \dots + & X \end{matrix}$$

(supponendo, che la serie $X^{\infty+1}$, $X^{\infty+2}$, $X^{\infty+3}$, $X^{\infty+4}$, ec. abbia le terze differenze costanti), che è

$$-S = dS = nX' + n\left\{\begin{matrix} +X'' + X''' + X'''' + X''''' + \dots\dots + X^{\infty+1} \\ -X' - X'' - X''' - X'''' - \dots\dots - X^{\infty} \end{matrix}\right\}$$

$$+ \frac{n \times \overline{n-1}}{1.\ 2.} \times \overline{X'-X} + \frac{n \times \overline{n-1}}{1.\ 2.} \left\{\begin{matrix} +X''' + X'''' + X''''' + \dots + X^{\infty+2} \\ -2X'' - 2X''' - 2X'''' - \dots - X^{\infty+1} \\ + X + X' + X'' + \dots + X^{\infty} \end{matrix}\right\}$$

$$+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\times\overline{X''-2X'+X'}+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\left\{\begin{array}{l}+X''''+X'''''+\ldots+X^{\infty+3}\\-3X'''-3X''''-\ldots-X^{\infty+2}\\+3X''+3X'''+\ldots+X^{\infty+1}\\-X'-X''-\ldots-X^{\infty}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{n}{dx}\,d.\,(X'+X''+X'''+X''''+\ldots+X^{\infty})$$

$$-\frac{n^2}{2\overline{dx}^2}\,d^2(X'+X''+X'''+X''''+\ldots+X^{\infty})$$

$$-\frac{n^3}{6\overline{dx}^3}\,d^3(X'+X''+X'''+X''''+\ldots+X^{\infty})$$

$$-\frac{n^4}{24\overline{dx}^4}\,d^4(X'+X''+X'''+X''''+\ldots+X^{\infty})\ \text{ec.}$$

Siccome poi n disegna una quantità minima, se in luogo di n si sostituirà dx, il differenziale completo di S sarà

$$dS=X'dx+dx\left\{\begin{array}{l}+X''+X'''+X''''+X'''''+X''''''+\ldots+X^{\infty+1}\\-X'-X''-X'''-X''''-X'''''-\ldots-X^{\infty}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{dx\times\overline{1-dx}}{1.\ 2.}\times\overline{X''-X'}-\frac{dx\times\overline{1-dx}}{1.\ 2.}\left\{\begin{array}{l}+X'''+X''''+X'''''+\ldots+X^{\infty+2}\\-2X''-2X'''-2X''''-\ldots-X^{\infty+1}\\+X'+X''+X'''+\ldots+X^{\infty}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{dx\times\overline{1-dx}\times\overline{2-dx}}{1.\quad 2.\quad 3.}\times\overline{X''-2X'+X}+\frac{dx\times\overline{1-dx}\times\overline{2-dx}}{1.\quad 2.\quad 3.}\left\{\begin{array}{l}+X'''+X''''+\ldots+X^{\infty+3}\\-3X''-3X'''-\ldots-X^{\infty+2}\\+3X'+3X''+\ldots+X^{\infty+1}\\-X-X'-\ldots-X^{\infty}\end{array}\right\}$$

$$-\quad d.\ (X'+X''+X'''+X''''+X'''''+\ldots+X^{\infty})$$

$$-\frac{1}{2}\,d^2.\,(X'+X''+X'''+X''''+X'''''+\ldots+X^{\infty})$$

$$-\frac{1}{6}\,d^3.\,(X'+X''+X'''+X''''+X'''''+\ldots+X^{\infty})$$

$$-\frac{1}{24}\,d^4.\,(X'+X''+X'''+X''''+X'''''+\ldots+X^{\infty})\text{ ec.}$$

147. Se la serie $X^{\infty+1}$, $X^{\infty+2}$, $X^{\infty+3}$, $X^{\infty+4}$, $X^{\infty+5}$ ec. avrà costanti non le differenze terze, ma le seconde, in tal caso il differenziale completo della funzione S sarà

$$d.S = X\,dx + dx\left\{\begin{array}{l}+X'+X''+X'''+X''''+\ldots+X^{\infty+1}\\-X-X'-X''-X'''-\ldots-X^{\infty}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{dx\times\overline{1-dx}}{1.\quad 2.}\times\overline{X''-X'}-\frac{dx\times\overline{1-dx}}{1.\quad 2.}\left\{\begin{array}{l}+X''+X'''+X''''+\ldots+X^{\infty+2}\\-2X'-2X''-2X'''-\ldots-X^{\infty+1}\\+X+X'+X''+\ldots+X^{\infty}\end{array}\right\}$$

$$- \quad d. \, (X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty})$$

$$- \frac{1}{2} d^2. \, (X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty})$$

$$- \frac{1}{6} d^3. \, (X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty})$$

$$- \frac{1}{24} d^4. \, (X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty}) \text{ ec.}$$

148. Se non le differenze feconde, ma le differenze prime faranno coftanti, in tal cafo il differenziale completo della funzione S farà

$$d.S = X'dx + dx \left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty+1} \\ - X' - X'' - X''' - X'''' - \ldots\ldots - X^{\infty} \end{array} \right\}$$

$$- \quad d. \, (X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty})$$

$$- \frac{1}{2} d^2. \, (X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty})$$

$$- \frac{1}{6} d^3. \, (X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty})$$

$$- \frac{1}{24} d^4. \, (X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty}) \text{ ec.}$$

149. Che fe ancora fvaniranno le differenze prime, lo che fuccedendo fvaniranno i termini $X^{\infty+1}$, $X^{\infty+2}$, $X^{\infty+3}$, $X^{\infty+4}$ ec., il differenziale completo della funzione S farà

$$d.S = - \quad d.(X'+X''+X'''+X''''+\ldots\ldots+X^{\infty})$$

$$-\frac{1}{2}\,d^2.(X'+X''+X'''+X''''+\ldots\ldots+X^{\infty})$$

$$-\frac{1}{6}\,d^3.(X'+X''+X'''+X''''+\ldots\ldots+X^{\infty})$$

$$-\frac{1}{24}\,d^4.(X'+X''+X'''+X''''+\ldots\ldots+X^{\infty})$$

150. Ritenendo l' espressione del num. 144., il differenziale della funzione S, che è $\Sigma - S = d.S$, si rappresenterà come segue, nel caso che svaniscano i termini $X^{\infty+1}$, $X^{\infty+2}$, $X^{\infty+3}$ ec.

$$d.\,S = \left\{ \begin{array}{l} +X'+X''+X'''+X''''+\ldots\ldots+X^{\infty} \\ -Z'-Z''-Z'''-Z''''-\ldots\ldots-Z^{\infty} \end{array} \right\}$$

151. Debbasi per esempio trovare il differenziale di questa funzione inesplicabile $S = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\overline{2x-1}^2}$. Essendo $X = \frac{1}{\overline{2x-1}^2}$ sarà $X' = \frac{1}{\overline{2x+1}^2}$, $X'' = \frac{1}{\overline{2x+3}^2}$, $X''' = \frac{1}{\overline{2x+5}^2}$,

$X'''' = \frac{1}{\overline{2x+7}^2}$ ec., con sostituire $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$ ec. in luogo di x nel termine generale $\frac{1}{\overline{2x-1}^2}$; e con sostituire (dx è in luogo di n) $x+1+dx$, $x+2+dx$, $x+3+dx$, $x+4+dx$ ec. in vece di x nello stesso termine generale,

si avrà

si avrà $\frac{1}{\overline{2x+1+2dx}^2} = Z'$, $\frac{1}{\overline{2x+3+2dx}^2} = Z''$, $\frac{1}{\overline{2x+5+2dx}^2} = Z'''$,

$\frac{1}{\overline{2x+7+2dx}^2} = Z''''$ ec., onde, colla sostituzione di questi valori di X', X'', X''' ec.;

Z', Z'', Z''' ec., l'equazione del num. 150. (di cui devesi prevalere, perchè i termini infinitamente distanti dal primo della proposta serie si fanno evanescenti) diventa

$$d.S = \begin{cases} + \frac{1}{\overline{2x+1}^2} + \frac{1}{\overline{2x+3}^2} + \frac{1}{\overline{2x+5}^2} + \frac{1}{\overline{2x+7}^2} \text{ ec.} \\ - \frac{1}{\overline{2x+1+2dx}^2} - \frac{1}{\overline{2x+3+2dx}^2} - \frac{1}{\overline{2x+5+2dx}^2} - \frac{1}{\overline{2x+7+2dx}^2} \text{ ec.} \end{cases}$$

che, con unire i corrispondenti termini positivi, e negativi, riduco alla seguente

forma $d.S. = + \frac{\overline{2x+1+2dx}^2 - (\overline{2x+1})^2}{\overline{2x+1}^2 \times \overline{2x+1+2dx}^2} + \frac{\overline{2x+3+2dx}^2 - (\overline{2x+3})^2}{\overline{2x+3}^2 \times \overline{2x+3+2dx}^2} +$

$\frac{\overline{2x+5+dx}^2 - (\overline{2x+5})^2}{\overline{2x+5}^2 \times \overline{2x+5+2dx}^2} + \frac{\overline{2x+7+2dx}^2 - (\overline{2x+7})^2}{\overline{2x+7}^2 \times \overline{2x+7+2dx}^2} +$ ec., o sia

$$d.S = + \frac{4dx \times \overline{2x+1+dx}}{\overline{2x+1}^2 \times \overline{2x+1+2dx}^2} + \frac{4dx \times \overline{2x+3+dx}}{\overline{2x+3}^2 \times \overline{2x+3+2dx}^2} +$$

$$\frac{4dx \times \overline{2x+5+dx}}{\overline{2x+5}^2 \times \overline{2x+5+dx}^2} + \frac{4dx \times \overline{2x+7+dx}}{\overline{2x+7}^2 \times \overline{2x+7+2dx}^2} +$$

$\frac{4dx \times \overline{2x+9+dx}}{\overline{2x+9}^2 \times \overline{2x+9+2dx}^2}$ + ec. Ma perchè il primo termine è

4dx

$\frac{4dx}{\overline{2x+1}^2} \times \overline{\frac{2x+1+dx}{2x+1+2dx}}^2$, mediante l'attual divisione riduciamo il fattore

$\overline{\frac{2x+1+dx}{2x+1+2dx}}^2$ a questa forma $\overline{\frac{2x+1+dx}{2x+1+2ax}}^2 = \frac{1}{2x+1} - \frac{3dx}{\overline{2x+1}^2} +$

$\frac{8\overline{dx}^2}{\overline{2x+1}^3} - \frac{20\overline{dx}^3}{\overline{2x+1}^4} + \frac{48\overline{dx}^4}{\overline{2x+1}^5}$ — ec.; con che il detto primo termine

diventa $\frac{4dx}{\overline{2x+1}^2} \times \overline{\frac{1}{2x+1} - \frac{3dx}{\overline{2x+1}^2} + \frac{8\overline{dx}^2}{\overline{2x+1}^3} - \frac{20\overline{dx}^3}{\overline{2x+1}^4} + \frac{48\overline{dx}^4}{\overline{2x+1}^5} - \text{ec.}}$

$= \frac{4dx}{\overline{2x+1}^3} - \frac{12\overline{dx}^2}{\overline{2x+1}^4} + \frac{32\overline{dx}^3}{\overline{2x+1}^5} - \frac{80\overline{dx}^4}{\overline{2x+1}^6} + \frac{192\overline{dx}^5}{\overline{2x+1}^7}$ — ec.

Rispetto al secondo termine $\frac{4dx}{\overline{2x+3}^2} \times \overline{\frac{2x+3+dx}{2x+3+2dx}}^2$ si riduca colla divisione il fattore $\overline{\frac{2x+3+dx}{2x+3+2dx}}^2$ al seguente valore $\overline{\frac{2x+3+dx}{2x+3+2dx}}^2 =$

$\frac{1}{2x+3} - \frac{3dx}{\overline{2x+3}^2} + \frac{8\overline{dx}^2}{\overline{2x+3}^3} - \frac{20\overline{dx}^3}{\overline{2x+3}^4} + \frac{48\overline{dx}^4}{\overline{2x+3}^5}$ — ec., lo

che riduce il secondo termine $\frac{4dx}{\overline{2x+3}^2} \times \overline{\frac{2x+3+dx}{2x+3+2dx}}^2$ a questa forma

4dx

$$\frac{4dx}{\overline{2x+3}^{\,2}} \times \overline{+\frac{1}{2x+3} - \frac{3dx}{\overline{2x+3}^{\,2}} + \frac{8\,\overline{dx}^{\,2}}{\overline{2x+3}^{\,3}} - \frac{20\,\overline{dx}^{\,3}}{\overline{2x+3}^{\,4}} + \frac{48\,\overline{dx}^{\,4}}{\overline{2x+3}^{\,5}} - \text{ec.}}$$

$$= \frac{4dx}{\overline{2x+3}^{\,3}} - \frac{12\,\overline{dx}^{\,2}}{\overline{2x+3}^{\,4}} + \frac{32\,\overline{dx}^{\,3}}{\overline{2x+3}^{\,5}} - \frac{80\,\overline{dx}^{\,4}}{\overline{2x+3}^{\,6}} + \frac{192\,\overline{dx}^{\,5}}{\overline{2x+3}^{\,7}} - \text{ec.}$$

Istessamente operando si rrova, che il terzo termine $\frac{4dx}{\overline{2x+5}^{\,2}} \times \frac{\overline{2x+5+dx}}{\overline{2x+5+2dx}^{\,2}}$

diventa $\frac{4dx}{\overline{2x+5}^{\,3}} - \frac{12\,\overline{dx}^{\,2}}{\overline{2x+5}^{\,4}} + \frac{32\,\overline{dx}^{\,3}}{\overline{2x+5}^{\,5}} - \frac{80\,\overline{dx}^{\,4}}{\overline{2x+5}^{\,6}} + \frac{192\,\overline{dx}^{\,5}}{\overline{2x+5}^{\,7}} - \text{ec.}$

così il quarto termine passa ad essere $\frac{4dx}{\overline{2x+7}^{\,3}} - \frac{12\,\overline{dx}^{\,2}}{\overline{2x+7}^{\,4}} + \frac{32\,\overline{dx}^{\,3}}{\overline{2x+7}^{\,5}}$

$- \frac{80\,\overline{dx}^{\,4}}{\overline{2x+7}^{\,6}} + \frac{192\,\overline{dx}^{\,5}}{\overline{2x+7}^{\,7}} - \text{ec.}$, il quinto risulta $+ \frac{4dx}{\overline{2x+9}^{\,3}} -$

$\frac{12\,\overline{dx}^{\,2}}{\overline{2x+9}^{\,4}} + \frac{32\,\overline{dx}^{\,3}}{\overline{2x+9}^{\,5}} - \frac{80\,\overline{dx}^{\,4}}{\overline{2x+9}^{\,6}} + \frac{192\,\overline{dx}^{\,5}}{\overline{2x+9}^{\,7}} - \text{ec.}$

Lo stesso si dica degli altri termini. Che però se si disporranno tutti questi termini secondo la loro omogeneità, il differenziale della proposta funzione si troverà essere

d.S

$$d.S = +4dx\left(\frac{1}{\overline{2x+1}^3} + \frac{1}{\overline{2x+3}^3} + \frac{1}{\overline{2x+5}^3} + \frac{1}{\overline{2x+7}^3} + \frac{1}{\overline{2x+9}^3} + \text{ec.}\right)$$

$$-12\,\overline{dx}^2\left(\frac{1}{\overline{2x+1}^4} + \frac{1}{\overline{2x+3}^4} + \frac{1}{\overline{2x+5}^4} + \frac{1}{\overline{2x+7}^4} + \frac{1}{\overline{2x+9}^4} + \text{ec.}\right)$$

$$+32\,\overline{dx}^3\left(\frac{1}{\overline{2x+1}^5} + \frac{1}{\overline{2x+3}^5} + \frac{1}{\overline{2x+5}^5} + \frac{1}{\overline{2x+7}^5} + \frac{1}{\overline{2x+9}^5} + \text{ec.}\right)$$

$$-80\,\overline{dx}^4\left(\frac{1}{\overline{2x+1}^6} + \frac{1}{\overline{2x+3}^6} + \frac{1}{\overline{2x+5}^6} + \frac{1}{\overline{2x+7}^6} + \frac{1}{\overline{2x+9}^6} + \text{ec.}\right)$$

$$+192\,\overline{dx}^5\left(\frac{1}{\overline{2x+1}^7} + \frac{1}{\overline{2x+3}^7} + \frac{1}{\overline{2x+5}^7} + \frac{1}{\overline{2x+7}^7} + \frac{1}{\overline{2x+9}^7} + \text{ec.}\right)$$

152. Lo stesso differenziale si poteva trovare più speditamente mediante la formola del num. 149., ove i differenziali sono soltanto indicati. Di fatto la prima fila orizzontale $-d.\,(X' + X'' + X''' + X'''' + \ldots + X^{\infty})$ col sostituire i valori di X', X'', X''' ec. trovasi essere

$$-d.\left(\frac{1}{\overline{2x+1}^2} + \frac{1}{\overline{2x+3}^2} + \frac{1}{\overline{2x+5}^2} + \frac{1}{\overline{2x+7}^2} + \text{ec.}\right),$$ il di cui

differenziale è $\frac{4dx}{\overline{2x+1}^3} + \frac{4dx}{\overline{2x+3}^3} + \frac{4dx}{\overline{2x+5}^3} + \frac{4dx}{\overline{2x+7}^3} + \text{ec.} =$

$$(P)\ 4dx\left(\frac{1}{\overline{2x+1}^3} + \frac{1}{\overline{2x+3}^3} + \frac{1}{\overline{2x+5}^3} + \frac{1}{\overline{2x+7}^3} + \text{ec.}\right).$$

La seconda fila orizzontale poi $-\frac{1}{2}\,d^2\,(X' + X'' + X''' + \ldots + X^{\infty})$ de-

denota le differenze seconde della serie

$\frac{1}{\overline{2x+1}^2} + \frac{1}{\overline{2x+3}^2} + \frac{1}{\overline{2x+5}^2} + \frac{1}{\overline{2x+7}^2}$ + ec., o sia le differenze prime della serie (P); onde differenziando la serie (P) si avrà (con ritenere costante dx) (R) $-\frac{24\,\overline{dx}^2}{\overline{2x+1}^4} - \frac{24\,\overline{dx}^2}{\overline{2x+3}^4} - \frac{24\,\overline{dx}^2}{\overline{2x+5}^4}$ — ec., o sia

$-24\,\overline{dx}^2 \left(\frac{1}{\overline{2x+1}^4} + \frac{1}{\overline{2x+3}^4} + \frac{1}{\overline{2x+5}^4} + \text{ec.}\right)$, che divisa per 2,

a motivo, che lo è pure la fila $-\frac{1}{2} d^2 (X' + X'' + X''' + \ldots + X\infty)$, trovasi es-

sere (Q) $-12dx \left(\frac{1}{\overline{2x+1}^4} + \frac{1}{\overline{2x+3}^4} + \frac{1}{\overline{2x+5}^4} + \frac{1}{\overline{2x+7}^4} + \text{ec.}\right)$

Così la terza fila orizzontale $-\frac{1}{6} d^3 . (X' + X'' + X''' + \ldots . + X\infty)$ esprime

il differenziale terzo della serie $\frac{1}{\overline{2x+1}^2} + \frac{1}{\overline{2x+3}^2} + \frac{1}{\overline{2x+5}^2}$ + ec.,

ovvero il differenziale primo della serie (R), che è

$$+\frac{192\,\overline{dx}^3}{\overline{2x+1}^5} + \frac{192\,\overline{dx}^3}{\overline{2x+3}^5} + \frac{192\,\overline{dx}^3}{\overline{2x+5}^5} + \text{ec.} =$$

$+192\,\overline{dx}^3 \left(\frac{1}{\overline{2x+1}^5} + \frac{1}{\overline{2x+3}^5} + \frac{1}{\overline{2x+5}^5} + \text{ec.}\right)$, che devesi di-

vi-

videre per 6, come lo è la fila orizzontale $-\frac{1}{6}\,d^3.\,(X'+X''+X'''+\ldots+X\infty)$, con che diventa

$$+\,3^2\,\overline{dx}^3\left(\frac{1}{\overline{2x+1}^5}+\frac{1}{\overline{2x+3}^5}+\frac{1}{\overline{2x+5}^5}+\frac{1}{\overline{2x+7}^5}+\text{ec.}\right)$$

Lo stesso si dica delle altre file orizzontali della formola del num. 149.

153. Qualora sia $x=0$, sarà ancora $S=0$, ed Σ sarà la somma della serie

$$\overset{1.}{A}+\overset{2.}{B}+\overset{3.}{C}+\overset{4.}{D}+\ldots\ldots\ldots+\overset{n}{Z},$$

la quale contiene un numero n di termini, essendo che Z è il termine, cui compete l'indice n, e in oltre sarà $X'=A$; $X''=B$; $X'''=C$; $X''''=D$; ec. Onde (si veda il num. 146.) se si porrà

$$\frac{d.}{dx}(X'+X''+X'''+\ldots+X\infty)=M;\ \frac{d^2.}{2\,\overline{dx}^2}(X'+X''+X'''+\ldots+X\infty)$$

$$=N;\ \frac{d^3.}{6\,\overline{dx}^3}(X'+X''+X'''+\ldots\ldots\ldots X\infty)=P;$$

$$\frac{d^4.}{24\,\overline{dx}^4}[X'+X''++X'''+\ldots\ldots+X\infty]=Q\ \text{ec.},$$ la formola generale del num. 146, la quale suppone le differenze terze costanti, diverrà

$$\Sigma=nA+n\left\{\begin{array}{l}+B+C+D+E+\text{ec.}\\-A-B-C-D-\text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\times\overline{B-A}+\frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\left\{\begin{array}{l}+C+D+E+F+\text{ec.}\\-2B-2C-2D-2E-\text{ec.}\\+A+B+C+D+\text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\times\overline{C-2B+A}+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\left\{\begin{array}{l} +D+E+F+\text{ec.}\\ -3C-3D-3E-\text{ec.}\\ +3B+3C+3D+\text{ec.}\\ -A-B-C-\text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$-nM-n^2N-n^3P-n^4Q-\text{ec.}$$

154. Se non le differenze terze, ma le seconde saranno costanti, si avrà

$$\Sigma=nA+n\left\{\begin{array}{l} +B+C+D+E+\ \text{ec.}\\ -A-B-C-D-\ \text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\times\overline{B-A}+\frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\left\{\begin{array}{l} +C+D+E+F+\text{ec.}\\ -2B-2C-2D-2E-\text{ec.}\\ +A+B+C+D+\text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$-nM-n^2N-n^3P-n^4Q-\text{ec.}$$

155. Se saranno costanti le differenze prime, sarà

$$\Sigma=nA+n\left\{\begin{array}{l} +B+C+D+E+\ \text{ec.}\\ -A-B-C-D-\ \text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$-nM-n^2N-n^3P-n^4Q-\ \text{ec.}$$

156. Se ad n si sostituirà x, passerà Σ in S, e però sarà in quest' ultimo caso

$$S=Ax+x\left\{\begin{array}{l} +B+C+D+E+\ \text{ec.}\\ -A-B-C-D-\ \text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$-Mx-Nx^2-Px^3-Qx^4-\text{ec.}$$

Pren

Prendendo i differenziali, e i differenziali de' differenziali di queſta equazione, ne verrà [ritenendo però dx coſtante]

$$d.\,S = A\,dx + dx \left\{ \begin{array}{l} +B+C+D+E+ \text{ ec.} \\ -A-B-C-D- \text{ ec.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{lr} & -M\,dx - 2Nx\,dx - 3Px^2\,dx - 4Qx^3\,dx - \text{ec.} \\ \frac{1}{2}d^2.\,S = & -N\,\overline{dx}^2 - 3Px\,\overline{dx}^2 - 6Qx^2\,\overline{dx}^2 - \text{ec.} \\ \frac{1}{6}d^3.\,S = & -P\,\overline{dx}^3 - 4Qx\,\overline{dx}^3 - \text{ec.} \\ \frac{1}{24}d^4.\,S = & -Q\,\overline{dx}^4 - \text{ec. ec.} \end{array}$$

Raccogliendo in una ſomma tutti queſti termini, ſi avrà il differenziale completo, che è

$$d.S + \frac{1}{2}d^2.S + \frac{1}{6}d^3.S + \frac{1}{24}d^4.S + \text{ec.}$$

$$= A\,dx + dx \times \overline{+B-A} + dx \times \overline{+C-B} + dx \times \overline{D-C} \text{ ec.}$$

$$-M\,dx - N \times \overline{2x\,dx + \overline{dx}^2} - P \times \overline{3x^2\,dx + 3x\,\overline{dx}^2 + \overline{dx}^3}$$

$$-Q \times \overline{4x^3\,dx + 6x^2\,\overline{dx}^2 + 4x\,\overline{dx}^3 + \overline{dx}^4} - \text{ec.}$$

Nel caſo poi, che ſvaniſcano i termini infinitamente diſtanti dal primo termine della ſerie, ſi avrà

$$S = \left\{ \begin{array}{l} +A+B+C+D+E+ \text{ ec.} \\ -Z'-Z''-Z'''-Z''''-Z'''''- \text{ ec.} \end{array} \right.$$

157. Essendosi trovato al num. 151.

$$z - S = 4dx \left(\frac{1}{\overline{2x+1}^3} + \frac{1}{\overline{2x+3}^3} + \frac{1}{\overline{2x+5}^3} + \frac{1}{\overline{2x+7}^3} + \text{ec.}\right)$$

$$- 12\, \overline{dx}^2 \left(\frac{1}{\overline{2x+1}^4} + \frac{1}{\overline{2x+3}^4} + \frac{1}{\overline{2x+5}^4} + \frac{1}{\overline{2x+7}^4} + \text{ec.}\right)$$

$$+ 32\, \overline{dx}^3 \left(\frac{1}{\overline{2x+1}^5} + \frac{1}{\overline{2x+3}^5} + \frac{1}{\overline{2x+5}^5} + \frac{1}{\overline{2x+7}^5} + \text{ec.}\right)$$

$$- 80\, \overline{dx}^4 \left(\frac{1}{\overline{2x+1}^6} + \frac{1}{\overline{2x+3}^6} + \frac{1}{\overline{2x+5}^6} + \frac{1}{\overline{2x+7}^6} + \text{ec.}\right)$$

$$+ 192\, \overline{dx}^5 \left(\frac{1}{\overline{2x+1}^7} + \frac{1}{\overline{2x+3}^7} + \frac{1}{\overline{2x+5}^7} + \frac{1}{\overline{2x+7}^7} + \text{ec.}\right)$$

se si farà $x = 0$, nel qual caso è $S = 0$, quest' equazione diverrà

$$z = 4dx \left(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{125} + \frac{1}{343} + \frac{1}{729} + \text{ec.}\right)$$

$$- 12\, \overline{dx}^2 \left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \frac{1}{2401} + \frac{1}{6561} + \text{ec.}\right)$$

$$+ 32\, \overline{dx}^3 \left(1 + \frac{1}{243} + \frac{1}{3125} + \frac{1}{16807} + \frac{1}{59049} + \text{ec.}\right)$$

$$- 80\,\overline{dx}^4 \left(1 + \frac{1}{729} + \frac{1}{15625} + \frac{1}{117649} + \frac{1}{531441} + \text{ec.} \right)$$

$$+ 192\,\overline{dx}^5 \left(1 + \frac{1}{2187} + \frac{1}{78125} + \frac{1}{823543} + \frac{1}{4782969} + \text{ec.} \right) \text{ec.}$$

o sia

$$z = 4dx \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \text{ec.} \right)$$

$$- 12\,\overline{dx}^2 \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{ec.} \right)$$

$$+ 32\,\overline{dx}^3 \left(1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + \text{ec.} \right)$$

$$- 80\,\overline{dx}^4 \left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{ec.} \right)$$

$$+ 192\,\overline{dx}^5 \left(1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} + \text{ec.} \right) \text{ec.}$$

158. Da quanto ho esposto per trovare il differenziale delle funzioni di questa forma

$$S = \overset{1.}{A} + \overset{2.}{B} + \overset{3.}{C} + \overset{4.}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

si può prender lume per differenziare le funzioni, che cadono sotto questa espressione

1. 2.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1. & 2. & 3. & 4 & . & . & . & . & . & x. \\ S = & A & . \; B & . \; C & . \; D & . & . & . & . & X \end{array}$$

(per minor imbarazzo mi ſervo nel preſente calcolo del punto per indicare la moltiplicazione). Prima di tutto però ſi oſſervi, che della formola [Q] $x + ndx$

$$+ \frac{n \times \overline{n-1}}{1. \;\; 2.} d^2x + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1. \;\; 2. \;\; 3.} d^3x + \text{ec.}$$

del num. 123. ſi può ſervire per eſibire il prodotto di un numero n di termini di una qualſivoglia ſerie algebraica, o geometrica, de' quali ſia dato il primo, che chiamo x, e le differenze rappreſentate da dx, d^2x, d^3x ec., con ridurla a queſta forma

$$x \times \overline{x+dx} \times \overline{x+2dx+d^2x} \times \overline{x+3dx+3d^2x+d^3x} \times \overline{\ldots x+\overline{n-1}dx+\frac{\overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1. \;\; 2.}d^2x},$$

+ ec., che ſi riduce ad $x \times \overline{x + dx} \times \overline{x + 2dx} \times \overline{x + 3dx} \times \overline{\ldots x+\overline{n-1} \times dx}$,

ſe le differenze prime della ſerie ſono coſtanti; ad

$$x \times \overline{x+dx} \times \overline{x+2dx+d^2x} \times \overline{x+3dx+3d^2x} \times \overline{\ldots x+\overline{n-1} \times dx+\frac{\overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1. \;\; 2.} \times d^2x}$$

ſe della ſerie le differenze ſeconde ſono coſtanti; ad

$$x \times \overline{x + dx} \times \overline{x+2dx+d^2x} \times \overline{x+3dx+3d^2x+d^3x} \times \overline{x+4dx+6d^2x+4d^3x} \times (\ldots$$

$$x + \overline{n-1} \times dx + \frac{\overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1. \;\; 2.} \times d^2x + \frac{\overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}}{1. \;\; 2. \;\; 3.} \times d^3x)$$

ſe le differenze terze ſono coſtanti ec.

159. Eſſendo x l'eſponente del termine X della ſerie, ſarà (a norma del num. 139.) $x+1$ l'eſponente di X', $x+2$ l'eſponente di X'', $x+3$ l'eſponente di X''' ec.. Sia Σ il valore, al quale paſſa la S, allorchè ſi prende $x+n$ in vece di x; ed eſſendo Z il termine della ſerie, cui compete l'indice $x+n$, ſarà Z' il termine, che ha per indice $x+n+1$; Z'' quello, cui corriſponde l'indice $x+n+2$ ec.. Ciò poſto ſi intende (giuſta il num. 144, che vale queſta equazione, ſe le differenze prime della ſerie A, B, C ec. ſono coſtanti

$\Sigma =$

Digitized by Google

$$\Sigma = S.x.\overline{x+dx}.\overline{x+2dx}\ldots\overline{x+\overline{n-1}.dx}.\frac{X'}{Z'}.\frac{X''}{Z''}.\frac{X'''}{Z'''}.\frac{X''''}{Z''''}\ldots\frac{X^{\infty}}{Z^{\infty}} \quad (A)$$

Se sono costanti le differenze seconde, vale la seguente

$$\Sigma = S.x.\overline{x+dx}.\overline{x+2dx+d^2x}\ldots.$$

$$\overline{x+\overline{n-1}.dx+\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\quad 2.}.d^2x}.\frac{X'}{Z'}.\frac{X''}{Z''}.\frac{X'''}{Z'''}\ldots\frac{X^{\infty}}{Z^{\infty}} \quad (B)$$

Se sono costanti le differenze terze, vale la seguente

$$\Sigma = S.x.\overline{x+dx}.\overline{x+2dx+d^2x}.\overline{x+3dx+3d^2x+d^3x}\ldots.$$

$$\overline{x+\overline{n-1}.dx+\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\quad 2.}.d^2x+\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}d^3x}.$$

$$\frac{X'}{Z'}.\frac{X''}{Z''}.\frac{X'''}{Z'''}.\frac{X''''}{Z''''}\ldots\frac{X^{\infty}}{Z^{\infty}} \quad (D) \text{ ec.}$$

Ora (pel num. 769. Tomo II.) volendo passare ai logaritmi, l' equazione (A) diventa

$$l.\Sigma = l.S + l.x + l.\overline{x+dx} + l.\overline{x+2dx} + \ldots + l.\overline{x+\overline{n-1}.dx}$$
$$+ l.X' + l.X'' + l.X''' + \ldots + l.X^{\infty}$$
$$- l.Z' - l.Z'' - l.Z''' - \ldots - l.Z^{\infty}$$

L' equa-

L' equazione (B) paſſa ad eſſere

$$l.\Sigma = l.S + l.x + l.\overline{x+dx} + l.\overline{x+2dx+d^2x} + \ldots$$
$$+ l.\overline{x+\overline{n-1}.dx+\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\quad 2.}.d^2x}$$
$$+ l.X' + l.X'' + \ldots + l.X^{\infty}$$
$$- l.Z' - l.Z'' - \ldots - l.Z^{\infty}$$

L' equazione (D) ſi cambia nella ſeguente

$$l.\Sigma = l.S + l.x + l.\overline{x+dx} + l.\overline{x+2dx+d^2x} + l.\overline{x+3dx+3d^2x+d^3x} + \ldots$$
$$+ l.\overline{x+\overline{n-1}.dx+\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\quad 2.}.d^2x+\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}.d^3x}$$
$$+ l.X' + l.X'' + l.X''' + \ldots + l.X^{\infty}$$
$$- l.Z' - l.Z'' - l.Z''' - \ldots - l.Z^{\infty}$$

Ma dal primo termine x della formola (Q) viene indicato il termine $X^{\infty+1}$, il quale (pel num. 145.) ſi eſprime in queſto modo

$$x = \begin{cases} X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots + X^{\infty+1} \\ - X' - X'' - X''' - X'''' - \ldots - X^{\infty} \end{cases}$$

e che nel preſente caſo ſi rappreſenta così,

$$x = X' . \frac{X''}{X'} . \frac{X'''}{X''} . \frac{X''''}{X'''} . \frac{X'''''}{X''''} . \ldots . \frac{X^{\infty+1}}{X^{\infty}}$$

In oltre dx nella formola (Q) denota la differenza, che paſſa tra $X^{\infty+2}$, ed $X^{\infty+1}$; e ſiccome

$X^{\infty+2}$

$$X^{\infty+2} - X^{\infty+1} = \begin{cases} +X'' \begin{array}{l} + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty+2} \\ -2X'' - 2X''' - 2X'''' - \ldots\ldots - 2X^{\infty+1} \end{array} \\ -X' \;\; + X' + X'' + X''' + \ldots\ldots + X^{\infty} \end{cases}$$

perciò farà $l.\ \overline{x + dx}$ = al logaritmo della fomma del valore di x col valore di dx; che però fi prenda la fomma di quefti due valori così

$$x = \begin{cases} + X' + X'' + X''' + X'''' + \ldots\ldots + X^{\infty+1} \\ \quad - X' - X'' - X''' - \ldots\ldots - X^{\infty} \end{cases}$$

$$dx = \begin{cases} +X'' \begin{array}{l} + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty+2} \\ - 2X'' - 2X''' - 2X'''' - \ldots\ldots - 2X^{\infty+1} \end{array} \\ -X' \;\; + X' + X'' + X''' + \ldots\ldots + X^{\infty} \end{cases}$$

$$\text{Somma } x + dx = \begin{array}{l} + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \ldots\ldots + X^{\infty+2} \\ \quad - X'' - X''' - X'''' - \ldots\ldots - X^{\infty+1} \end{array}$$

che fi rapprefenta così $x + dx =$

$$X'' \cdot \frac{X'''}{X''} \cdot \frac{X''''}{X'''} \cdot \frac{X'''''}{X''''} \cdot \frac{X''''''}{X'''''} \ldots\ldots \frac{X^{\infty+2}}{X^{\infty+1}}$$

confeguentemente è

$$l.\ \overline{x + dx} = + l.\ X'' \begin{array}{l} + l.\ X''' + l.\ X'''' + l.\ X''''' + \ldots\ldots + l.\ X^{\infty+2} \\ - l.\ X'' - l.\ X''' - l.\ X'''' - \ldots\ldots - l.\ X^{\infty+1} \end{array}$$

Se pertanto fi moltiplicheranno infieme i valori trovati di x, e di $x + dx$, fi avrà

$$x \times \overline{x + dx} = X' \,.\, X'' \,.\, \frac{X'''}{X} \,.\, \frac{X''''}{X'} \,.\, \frac{X'''''}{X''} \,.\, \frac{X''''''}{X'''} \, \ldots\ldots \frac{X^{\infty+2}}{X^{\infty}} \,,$$

che con passare ai logaritmi diventa

$$l.\, x + l.\, \overline{x + dx} = l.X' + l.X'' \begin{array}{l} + l.X''' + l.X'''' + l.X''''' + \ldots\ldots + l.X^{\infty+2} \\ - l.X' - l.X'' - l.X''' - \ldots\ldots - l.X^{\infty} \end{array}$$

Parimente per le cose dette è

$$d^2x = \begin{array}{l} + X''' \\ - 2X'' \\ + X' \end{array} \begin{array}{l} + X'''' + X''''' + X'''''' + \ldots\ldots + X^{\infty+3} \\ - 3X''' - 3X'''' - 3X''''' - \ldots\ldots - 3X^{\infty+2} \\ + 3X'' + 3X''' + 3X'''' + \ldots\ldots + 3X^{\infty+1} \\ - X' - X'' - X''' - \ldots\ldots - X^{\infty} \end{array}$$

quindi per avere l'espressione di $l.\, \overline{x + 2dx + d^2x}$, devesi prendere la somma de' valori di x, di $2dx$, e di d^2x, come segue

$$x = + X' \begin{array}{l} + X'' + X''' + X'''' + \ldots\ldots + X^{\infty+1} \\ - X' - X'' - X''' - \ldots\ldots - X^{\infty} \end{array}$$

$$2dx = \begin{array}{l} + 2X'' \\ - 2X' \end{array} \begin{array}{l} + 2X''' + 2X'''' + 2X''''' + \ldots\ldots + 2X^{\infty+2} \\ - 4X'' - 4X''' - 4X'''' - \ldots\ldots - 4X^{\infty+1} \\ + 2X' + 2X'' + 2X''' + \ldots\ldots + 2X^{\infty} \end{array}$$

d^2x

$$d^2x = \begin{array}{l} + X''' \\ - 2X'' \\ + X' \end{array} \begin{array}{l} + X'''' + X''''' + X'''''' + \ldots + X^{\infty+3} \\ - 3X''' - 3X'''' - 3X''''' - \ldots - 3X^{\infty+2} \\ + 3X'' + 3X''' + 3X'''' + \ldots + 3X^{\infty+1} \\ - X' - X'' - X''' - \ldots - X^{\infty} \end{array}$$

Somma $x + 2dx + d^2x = X''' \begin{array}{l} + X'''' + X''''' + X'''''' + \ldots + X^{\infty+3} \\ - X''' - X'''' - X''''' - \ldots - X^{\infty+2} \end{array}$

che si rappresenta così,

$$x + 2dx + d^2x = X''' \cdot \frac{X''''}{X'''} \cdot \frac{X'''''}{X''''} \cdot \frac{X''''''}{X'''''} \cdot \frac{X'''''''}{X''''''} \cdot \ldots \cdot \frac{X^{\infty+3}}{X^{\infty+2}}$$

che però è $l.\,\overline{x + 2dx + d^2x} = l.\,X'''$
$+ l.\,X'''' + l.\,X''''' + l.\,X'''''' + \ldots + l.\,X^{\infty+3}$
$- l.\,X''' - l.\,X'''' - l.\,X''''' - \ldots - l.\,X^{\infty+2}$

E se si moltiplicheranno insieme i ritrovati valori di x, di $x + dx$, e di $x + 2dx + d^2x$, si avrà

$$x \times \overline{x + dx} \times \overline{x + 2dx + d^2x} =$$

$$X' \cdot X'' \cdot X''' \cdot \frac{X''''}{X'} \cdot \frac{X'''''}{X''} \cdot \frac{X''''''}{X'''} \cdot \frac{X'''''''}{X''''} \cdot \ldots \cdot \frac{X^{\infty+3}}{X^{\infty}}$$

e in

e in conseguenza

$$l.\,x + l.\,\overline{x + dx} + l.\,\overline{x + 2dx + d^2x} = l.\,X + l.\,X'' + l.\,X''' + l.\,X'''' + l.\,X''''' + l.\,X'''''' + l.\,X''''''' + \ldots + l.\,X^{\infty+3} - l.\,X' - l.\,X'' - l.\,X''' - l.\,X'''' - \ldots - l.\,X^{\infty}$$

Collo stesso metodo continuando le operazioni si troverà il valore di

$x \times \overline{x + dx} \times \overline{x + 2dx + d^2x} \times \overline{x + 3dx + 3d^2x + d^3x}$, e così in poi.

160. Che se il valore di n sarà minimo, si avrà

$l.\,\Sigma - l.\,S = d.\,l.\,S = \frac{d\,S}{S}$. A norma poi del num. 146. è

$$l.\,X' - l.\,Z' = -\frac{n}{dx}\,d.\,l.\,X' - \frac{n^2}{2\,\overline{dx}^2}\,d^2\,l.\,X' - \frac{n^3}{6\,\overline{dx}^3}\,d^3.\,l.\,X' - \text{ec.},$$

$$l.\,X'' - l.\,Z'' = -\frac{n}{dx}\,d.\,l.\,X'' - \frac{n^2}{2\,\overline{dx}^2}\,d^2.\,l.\,X'' - \frac{n^3}{6\,\overline{dx}^3}\,d^3.\,l.\,X'' - \frac{n^4}{24\overline{dx}^4}\,d^4.\,l.\,X'' - \text{ec.};$$

$$l.\,X''' - l.\,Z''' = -\frac{n}{dx}\,d.\,l.\,X''' - \frac{n^2}{2\,\overline{dx}^2}\,d^2\,l.\,X''' - \frac{n^3}{6\,\overline{dx}^3}\,d^3\,l.\,X''' - \frac{n^4}{24\overline{dx}^4}\,d^4\,l.\,X''' - \text{ec. ec.};$$

che però sostituendo dx in luogo di n, si trova

+ l. X'

Digitized by Google

$$+ l.X' + l.X'' + l.X''' + \ldots + l.X^{\infty}$$
$$- l.Z' - l.Z'' - l.Z''' - \ldots - l.Z^{\infty}$$

$$= \begin{cases} - d\ (+ l.X' + l.X'' + l.X''' + l.X'''' + \ldots + l.X^{\infty}) \\ - \frac{1}{2} d^2 (+ l.X' + l.X'' + l.X''' + l.X'''' + \ldots + l.X^{\infty}) \\ - \frac{1}{6} d^3 (+ l.X' + l.X'' + l.X''' + l.X'''' + \ldots + l.X^{\infty}) \\ - \frac{1}{24} d^4 (+ l.X' + l.X'' + l.X''' + l.X'''' + \ldots + l.X^{\infty}) \text{ ec.} \end{cases}$$

161. Quindi se i termini infinitamente distanti dal primo termine della serie A, B, C, D ec. saranno eguali all' unità, onde svaniscano i loro logaritmi, il differenziale del logaritmo della funzione S sarà

$$d.\,l.\,S = \frac{d.S}{S} =$$

$$- d.\ (+ l.X' + l.X'' + l.X''' + l.X'''' + \ldots + l.X^{\infty})$$

$$- \frac{1}{2} d^2 (+ l.X' + l.X'' + l.X''' + l.X'''' + \ldots + l.X^{\infty})$$

$$- \frac{1}{6} d^3 (+ l.X' + l.X'' + l.X''' + l.X'''' + \ldots + l.X^{\infty})$$

$$- \frac{1}{24} d^4 (+ l.X' + l.X'' + l.X''' + l.X'''' + \ldots + l.X^{\infty})$$

162. Se non isvaniranno i logaritmi dei termini infinitamente distanti dal primo termine della serie A, B, C, D ec., ma svaniscano le differenze di questi logaritmi, con ritenere dx in luogo di x, il differenziale cercato sarà

$$d.\,l.\,S = \frac{d\,S}{S} = dx\;l.\,X' + dx$$

$$\left\{ + l.\,\frac{X''}{X'} + l.\,\frac{X'''}{X''} + l.\,\frac{X''''}{X'''} + l.\,\frac{X'''''}{X''''} + \ldots + l.\,\frac{X^{\infty+1}}{X^{\infty}} \right\}$$

$$-\ d.\ (+ l.\,X' + l.\,X'' + l.\,X''' + l.\,X'''' + \ldots + l.\,X^{\infty})$$

$$-\frac{1}{2}d^2 (+ l.\,X' + l.\,X'' + l.\,X''' + l.\,X'''' + \ldots + l.\,X^{\infty})$$

$$-\frac{1}{6}d^3 (+ l.\,X' + l.\,X'' + l.\,X''' + l.\,X'''' + \ldots + l.\,X^{\infty})$$

$$-\frac{1}{24}d^4 (+ l.\,X' + l.\,X'' + l.\,X''' + l.\,X'''' + \ldots + l.\,X^{\infty}) \text{ ec.}$$

163. Debbasi per esempio trovare il differenziale completo di questa funzione inesplicabile $S = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{13}{16}\cdot\frac{17}{20}\cdot\ldots\ldots\frac{4x-3}{4x}$. Essendo $X = \frac{4x-3}{4x}$, sarà $X' = \frac{4x+1}{4x+4}$, $X'' = \frac{4x+5}{4x+8}$, $X''' = \frac{4x+9}{4x+12}$, $X'''' = \frac{4x+13}{4x+16}$, $X''''' = \frac{4x+17}{4x+20}$ ec. E perchè $l.\,X' = l.\,\overline{4x+1} - l.\,\overline{4x+4}$, si ha $d.\,l.\,X' = \frac{4dx}{4x+1} - \frac{4dx}{4x+4}$; $d^2.\,l.\,X' = -\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+1}^2} + \frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+4}^2}$; $d^3.\,l.\,X' = \frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+1}^3} - \frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+4}^3}$; $d^4.\,l.\,X' = -\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+1}^4} + \frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+4}^4}$ ec.

E

Digitized by Google

E poichè $l.\ X'' = l.\ \overline{4x+5} - l.\ \overline{4x+8}$, si ha $d.l.\ X'' = \frac{4dx}{4x+5} - \frac{4dx}{4x+8}$;

$d^2.\ l.\ X'' = -\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+5}^2} + \frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+8}^2}$: $d^3.\ l.\ X'' = \frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+5}^3} - \frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+8}^3}$;

$d^4.\ l.\ X'' = -\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+5}^4} + \frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+8}^4}$ ec. Parimente essendo $l.\ X''' = l.\ \overline{4x+9} - l.\ \overline{4x+12}$, si ha $d.l.\ X''' = \frac{4dx}{4x+9} - \frac{4dx}{4x+12}$; $d^2.\ l.\ X''' = -\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+9}^2} + \frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+12}^2}$; $d^3.\ l.\ X''' = \frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+9}^3} - \frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+12}^3}$, $d^4.\ l.\ X''' = \frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+9}^4} - \frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+12}^4}$ ec. Nello stesso modo si determinino i valori di $d.l.\ X''''$, di $d.l.\ X'''''$ ec.

Ora a motivo, che i termini della serie $\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{9}{12}, \frac{13}{16}$ ec. prodotto all' infinito sono eguali all' unità, come costa dal fare $x = \infty$ nel termine generale $\frac{4x-3}{4x}$, che diventa $\frac{4\infty - 3}{4\infty} = \frac{4\infty}{4\infty} = 1$, si fanno evanescenti i loro logaritmi, onde è, che per avere il differenziale cercato serve la formola del num. 161. Si sostituiscano pertanto in tale formola i ritrovati valori di $d.\ l.\ X'$, di $d.\ l.\ X''$ ec., di $d^2.\ l.\ X'$, di $d^2.\ l.\ X''$ ec. e disponendo a dovere i termini, si troverà.

$$\frac{d.S}{S} = 1\left\{\begin{array}{l} -\frac{4dx}{4x+1}-\frac{4dx}{4x+5}-\frac{4dx}{4x+9}-\frac{4dx}{4x+13}-\frac{4dx}{4x+17}-\text{ec.} \\ +\frac{4dx}{4x+4}+\frac{4dx}{4x+8}+\frac{4dx}{4x+12}+\frac{4dx}{4x+16}+\frac{4dx}{4x+20}+\text{ec.} \end{array}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} +\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+1}^2}+\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+5}^2}+\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+9}^2}+\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+13}^2}+\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+17}^2}+\text{ec.} \\ -\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+4}^2}-\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+8}^2}-\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+12}^2}-\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+16}^2}-\frac{16\overline{dx}^2}{\overline{4x+20}^2}-\text{ec.} \end{array}\right.$$

$$+\frac{1}{6}\left\{\begin{array}{l} -\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+1}^3}-\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+5}^3}-\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+9}^3}-\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+13}^3}-\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+17}^3}-\text{ec.} \\ +\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+4}^3}+\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+8}^3}+\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+12}^3}+\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+16}^3}+\frac{128\overline{dx}^3}{\overline{4x+20}^3}+\text{ec.} \end{array}\right.$$

$$+\frac{1}{24}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+1}^4}+\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+5}^4}+\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+9}^4}+\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+13}^4}+\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+17}^4}+\text{ec.} \\ -\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+4}^4}-\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+8}^4}-\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+12}^4}-\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+16}^4}-\frac{1536\overline{dx}^4}{\overline{4x+20}^4}-\text{ec.} \end{array}\right.$$

o sia

Digitized by Google

o sia $\frac{d.S}{S} =$

$$-4dx\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{4x+1}+\frac{1}{4x+5}+\frac{1}{4x+9}+\frac{1}{4x+13}+\frac{1}{4x+17}+\text{ec.} \\ -\frac{1}{4x+4}-\frac{1}{4x+8}-\frac{1}{4x+12}-\frac{1}{4x+16}-\frac{1}{4x+20}-\text{ec.} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{16\overline{dx}^2}{2}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{\overline{4x+1}^2}+\frac{1}{\overline{4x+5}^2}+\frac{1}{\overline{4x+9}^2}+\frac{1}{\overline{4x+13}^2}+\frac{1}{\overline{4x+17}^2}+\text{ec.} \\ -\frac{1}{\overline{4x+4}^2}-\frac{1}{\overline{4x+8}^2}-\frac{1}{\overline{4x+12}^2}-\frac{1}{\overline{4x+16}^2}-\frac{1}{\overline{2x+20}^2}-\text{ec.} \end{array}\right\}$$

$$-\frac{128\overline{dx}^3}{6}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{\overline{4x+1}^3}+\frac{1}{\overline{4x+5}^3}+\frac{1}{\overline{4x+9}^3}+\frac{1}{\overline{4x+13}^3}+\frac{1}{\overline{4x+17}^3}+\text{ec.} \\ -\frac{1}{\overline{4x+4}^3}-\frac{1}{\overline{4x+8}^3}-\frac{1}{\overline{4x+12}^3}-\frac{1}{\overline{4x+10}^3}-\frac{1}{\overline{4x+20}^3}-\text{ec.} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{1536\overline{dx}^4}{24}\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{1}{\overline{4x+1}^4}+\dfrac{1}{\overline{4x+5}^4}+\dfrac{1}{\overline{4x+9}^4}+\dfrac{1}{\overline{4x+13}^4}+\dfrac{1}{\overline{4x+17}^4}+\text{ec.}\\ -\dfrac{1}{\overline{4x+4}^4}-\dfrac{1}{\overline{4x+8}^4}-\dfrac{1}{\overline{4x+12}^4}-\dfrac{1}{\overline{4x+16}^4}-\dfrac{1}{\overline{4x+20}^4}-\text{ec.}\end{array}\right\}\text{ec.}$$

O pure con ridurre i corrispondenti termini allo stesso denominatore

$$\frac{d.S}{S}=-4d.x\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{3}{\overline{4x+4}\times\overline{4x+1}}+\dfrac{3}{\overline{4x+8}\times\overline{4x+5}}\\ +\dfrac{3}{\overline{4x+12}\times\overline{4x+9}}+\dfrac{3}{\overline{4x+16}\times\overline{4x+13}}+\text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{16}{2}\overline{dx}^2\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{24x+15}{\overline{4x+4}^2\times\overline{4x+1}^2}+\dfrac{24x+39}{\overline{4x+8}^2\times\overline{4x+5}^2}\\ +\dfrac{24x+63}{\overline{4x+12}^2\times\overline{4x+9}^2}+\dfrac{24x+87}{\overline{4x+16}^2\times\overline{4x+13}^2}+\text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{128}{6}\overline{dx}^3\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{144x^2+180x+63}{\overline{4x+4}^3\times\overline{4x+1}^3}+\dfrac{144x^2+468x+387}{\overline{4x+8}^3\times\overline{4x+5}^3}\\ \qquad+\dfrac{144x^2+756x+999}{\overline{4x+12}^3\times\overline{4x+9}^3}+\text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1536}{24}\overline{dx}^4\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{768x^3+1440x^2+1008x+255}{\overline{4x+4}^4\times\overline{4x+1}^4}\\ +\dfrac{768x^3+3744x^2+6192x+3471}{\overline{4x+8}^4\times\overline{4x+5}^4}\quad+\text{ec.}\end{array}\right\}+\text{ec.}$$

164. Per applicare il metodo a un altro esempio, prenderò a differenziare l'equazione della curva ABCD (*Fig.* 11.), il di cui asse delle abscisse è EF, delle ordinate è QH, e l'origine delle coordinate è il punto Q. La natura di questa curva è tale, che se a una qualunque abscissa $x=m$ corrisponderà l'ordinata $y=n$, all'abscissa $x=m+1$ corrisponde l'ordinata $y=n\times\overline{m+1}$, e all'abscissa $x=m-1$ corrisponde l'ordinata $y=\frac{n}{m}$. Se pertanto le abscisse saranno 0, 1, 2, 3, 4 ec., le loro convenienti ordinate saranno come segue

Abscisse $x=0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.$ ec.

Corrispondenti ordinate $y=1.\ 1.\ 2.\ 6.\ 24.\ 120.\ 720.\ 5040.$ ec.;

che però l'equazione di questa curva è $y=1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ x$; onde la funzione da differenziarsi è $S=1.\ 2\ 3.\ 4\ 5.\ .\ .\ .\ x$. Ora perchè svaniscono le differenze dei logaritmi dei termini infinitamente distanti dal primo della serie 1, 2, 3, 4, 5, 6. ec., serve quindi a differenziare questa funzione la formola del num. 162. E siccome il termine generale della proposta serie 1, 2, 3, 4 ec. è x, si ha perciò $X'=x+1$, $X''=x+2$, $X'''=x+3$, $X''''=x+4$ ec., e a motivo di

$d.\ l.\ X' = d.\ l.\ \overline{x+1}$, è $d.\ l.\ X' = \frac{dx}{x+1}$; $d^2.\ l.\ X' = -\frac{\overline{dx}^2}{\overline{x+1}^2}$; $d^3.\ l.\ X' = \frac{2\overline{dx}^3}{\overline{x+1}^3}$; $d^4.\ l.\ X' = -\frac{6\overline{dx}^4}{\overline{x+1}^4}$, ec.

così $d.\ l\ X'' = \frac{dx}{x+2}$; $d^2.\ l.\ X'' = -\frac{\overline{dx}^2}{\overline{x+2}^2}$; $d^3.\ l.\ X'' = \frac{2\ \overline{dx}^3}{\overline{x+2}^3}$;

e $d.\ l.\ X''' = \frac{dx}{x+3}$; $d^2.\ l.\ X''' = -\frac{\overline{dx}^2}{\overline{x+3}^2}$; $d^3 l. X''' = \frac{2\ \overline{dx}^3}{\overline{x+3}^3}$, ec.

Quindi il differenziale cercato è

$$\frac{d.\ S}{S} = dx\ l.\ \overline{x+1} + dx \left(l.\ \frac{x+2}{x+1} + l.\ \frac{x+3}{x+2}\ l.\ \frac{x+4}{x+3} + \text{ec.}\right)$$

$$- dx \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\overline{dx}^2 \left(\frac{1}{\overline{x+1}^2} + \frac{1}{\overline{x+2}^2} + \frac{1}{\overline{x+3}^2} + \frac{1}{\overline{x+4}^2} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{1}{3}\overline{dx}^3 \left(\frac{1}{\overline{x+1}^3} + \frac{1}{\overline{x+2}^3} + \frac{1}{\overline{x+3}^3} + \frac{1}{\overline{x+4}^3} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\overline{dx}^4 \left(\frac{1}{\overline{x+1}^4} + \frac{1}{\overline{x+2}^4} + \frac{1}{\overline{x+3}^4} + \frac{1}{\overline{x+4}^4} + \text{ec.}\right) \text{ ec.}$$

165.

Digitized by Google

165. E qui si osservi, che è $l.\ \frac{x+2}{x+1} = l.\ \overline{1+\frac{1}{x+1}}$; $l.\ \frac{x+3}{x+2} = l.\ \overline{1+\frac{1}{x+2}}$; $l.\ \frac{x+4}{x+3} = l.\ \overline{1+\frac{1}{x+3}}$ ec.; che se i valori di questi logaritmi si vorranno esprimere con serie infinite a norma del num. CXII. Tomo III., ove si è trovato $l.\ \overline{1+z} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} -$ ec. niente altro si avrà a fare rispetto a $l.\ \overline{1+\frac{1}{x+1}}$, che sostituire $\frac{1}{x+1}$ in luogo di z, e con ciò si avrà $l.\ \overline{1+\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2 \times \overline{x+1}^2} + \frac{1}{3 \times \overline{x+1}^3} - \frac{1}{4 \times \overline{x+1}^4} + \frac{1}{5 \times \overline{x+1}^5} -$ ec. Isteffamente operando si troverà

$$l.\,\overline{1+\frac{1}{x+2}} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2\times\overline{x+2}^2} + \frac{1}{3\times\overline{x+2}^3} - \frac{1}{4\times\overline{x+2}^4} + \frac{1}{5\times\overline{x+2}^5} - \text{ec.};\ l.\,\overline{1+\frac{1}{x+3}} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2\times\overline{x+3}^2} + \frac{1}{3\times\overline{x+3}^3} -$$

$$\frac{1}{4\times\overline{x+3}^4} + \frac{1}{5\times\overline{x+3}^5} - \text{ec.};\ l.\,\overline{1+\frac{1}{x+4}} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{2\times\overline{x+4}^2} + \frac{1}{3\times\overline{x+4}^3} - \frac{1}{4\times\overline{x+4}^4} + \frac{1}{5\times\overline{x+4}^5} - \text{ec. ec.}$$

Che però il differenziale trovato diventa

$$\frac{d.\,S}{S} = dx\ l.\,\overline{x+1}$$

$$+dx\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+5} + \text{ec.} \\ -\frac{1}{2\times\overline{x+1}^2} - \frac{1}{2\times\overline{x+2}^2} - \frac{1}{2\times\overline{x+3}^2} - \frac{1}{2\times\overline{x+4}^2} - \frac{1}{2\times\overline{x+5}^2} - \text{ec.} \\ +\frac{1}{3\times\overline{x+1}^3} + \frac{1}{3\times\overline{x+2}^3} + \frac{1}{3\times\overline{x+3}^3} + \frac{1}{3\times\overline{x+4}^3} + \frac{1}{3\times\overline{x+5}^3} + \text{ec.} \\ -\frac{1}{4\times\overline{x+1}^4} - \frac{1}{4\times\overline{x+2}^4} - \frac{1}{4\times\overline{x+3}^4} - \frac{1}{4\times\overline{x+4}^4} - \frac{1}{4\times\overline{x+5}^4} - \text{ec.} \\ +\frac{1}{5\times\overline{x+1}^5} + \frac{1}{5\times\overline{x+2}^5} + \frac{1}{5\times\overline{x+3}^5} + \frac{1}{5\times\overline{x+4}^5} + \frac{1}{5\times\overline{x+5}^5} + \text{ec.} \end{array}\right\}\text{ec.}$$

— dx

$$- dx\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+5} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\,\overline{dx}^2\left(\frac{1}{\overline{x+1}^2} + \frac{1}{\overline{x+2}^2} + \frac{1}{\overline{x+3}^2} + \frac{1}{\overline{x+4}^2} + \frac{1}{\overline{x+5}^2} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{1}{3}\,\overline{dx}^3\left(\frac{1}{\overline{x+1}^3} + \frac{1}{\overline{x+2}^3} + \frac{1}{\overline{x+3}^3} + \frac{1}{\overline{x+4}^3} + \frac{1}{\overline{x+5}^3} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\,\overline{dx}^4\left(\frac{1}{\overline{x+1}^4} + \frac{1}{\overline{x+2}^4} + \frac{1}{\overline{x+3}^4} + \frac{1}{\overline{x+4}^4} + \frac{1}{\overline{x+5}^4} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{1}{5}\,\overline{dx}^5\left(\frac{1}{\overline{x+1}^5} + \frac{1}{\overline{x+2}^5} + \frac{1}{\overline{x+3}^5} + \frac{1}{\overline{x+4}^5} + \frac{1}{\overline{x+5}^5} + \text{ec.}\right)\text{ec.}$$

che si riduce alla seguente forma

$$\frac{dS}{S} = dx\ l.\ \overline{x+1}$$

$$- \frac{1}{2} \times \overline{dx - \overline{dx}^2}\left(\frac{1}{\overline{x+1}^2} + \frac{1}{\overline{x+2}^2} + \frac{1}{\overline{x+3}^2} + \frac{1}{\overline{x+4}^2} + \frac{1}{\overline{x+5}^2} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{1}{3} \times \overline{dx - \overline{dx}^3}\left(\frac{1}{\overline{x+1}^3} + \frac{1}{\overline{x+2}^3} + \frac{1}{\overline{x+3}^3} + \frac{1}{\overline{x+4}^3} + \frac{1}{\overline{x+5}^3} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{1}{4} \times \overline{dx - \overline{dx}^4}\left(\frac{1}{\overline{x+1}^4} + \frac{1}{\overline{x+2}^4} + \frac{1}{\overline{x+3}^4} + \frac{1}{\overline{x+4}^4} + \frac{1}{\overline{x+5}^4} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{1}{5} \times \overline{dx - \overline{dx}^5}\left(\frac{1}{\overline{x+1}^5} + \frac{1}{\overline{x+2}^5} + \frac{1}{\overline{x+3}^5} + \frac{1}{\overline{x+4}^5} + \frac{1}{\overline{x+5}^5}\ \text{ec.} +\right)\text{ec.}$$

Digitized by Google

166. La formola del num. 164 col fare $x = 0$ si riduce alla seguente

$$\frac{dS}{S} = dx\, l.\, 1 + dx\left(l.\frac{2}{1} + l.\frac{3}{2} + l.\frac{4}{3} + l.\frac{5}{4} + \text{ec.}\right)$$

$$- dx\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\overline{dx}^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{1}{3}\overline{dx}^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\overline{dx}^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ec.}\right)\text{ec.}$$

cioè (con rimettere $l.\,S$ in vece di $\frac{d.\,S}{S}$; x in luogo di dx; x^2 in cambio di $\overline{dx}^2$ ec.)

167.

167. $l.\,S = +\,x\,(l.\,1 + l.\,\frac{2}{1} + l.\,\frac{3}{2} + l.\,\frac{4}{3} + l.\,\frac{5}{4} + \text{ec.})$

$$-\,x\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{ec.})$$

$$+\,\frac{1}{2}x^2\,(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ec.})$$

$$-\,\frac{1}{3}x^3\,(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ec.})$$

$$+\,\frac{1}{4}x^4\,(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ec.})\ \text{ec.}$$

che, con fare $l.\,1 + l.\,\frac{2}{1} + l.\,\frac{3}{2} + l.\,\frac{4}{3} + \text{ec.} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \text{ec.} = -M$, diventa

168. $l.\,S = -Mx + \frac{1}{2}x^2(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ec.})$

$$-\,\frac{1}{3}x^3(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ec.})$$

$$+\,\frac{1}{4}x^4(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ec.})\ \text{ec.}$$

169. Ora dico, che questa equazione si riduce a quest' altra forma

$$l.\,S = -\,Mx + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \text{ec.}$$

Digitized by Google

$$-l.\,\overline{1+x}-l.\,\overline{1+\frac{1}{2}x}-l.\,\overline{1+\frac{1}{3}x}-l.\,\overline{1+\frac{1}{4}x}-l.\,\overline{1+\frac{1}{5}x}-\text{ec.}$$

Di fatto si riducano in serie [giusta il num. CXII. Tomo IV.] le quantità

$-l.\,\overline{1+x}$, $-l.\,\overline{1+\frac{1}{2}x}$, $-l.\,\overline{1+\frac{1}{3}x}$ ec., e si avrà

$$-l.\,\overline{1+x}=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\text{ec.}$$

$$-l.\,\overline{1+\frac{1}{2}x}=-\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2.\,2^2}-\frac{x^3}{3.\,2^3}+\frac{x^4}{4.\,2^4}-\frac{x^5}{5.\,2^5}+\text{ec.}$$

$$-l.\,\overline{1+\frac{1}{3}x}=-\frac{1}{3}x+\frac{x^2}{2.\,3^2}-\frac{x^3}{3.\,3^3}+\frac{x^4}{4.\,3^4}-\frac{x^5}{5.\,3^5}+\text{ec.}$$

$$-l.\,\overline{1+\frac{1}{4}x}=-\frac{1}{4}x+\frac{x^2}{2.\,4^2}-\frac{x^3}{3.\,4^3}+\frac{x^4}{4.\,4^4}-\frac{x^5}{5.\,4^5}+\text{ec. ec.}$$

e sostituendo questi valori di $-l.\,\overline{1+x}$, $-l.\,\overline{1+\frac{1}{2}x}$, $-l.\,\overline{1+\frac{1}{3}x}$ ec.

ordinati secondo l'omogeneità de' termini, l'equazione si troverà essere

$$l.\,S = -Mx + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \text{ec.}$$

$$- x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x - \text{ec.}$$

$$+ \frac{1}{2}x^2(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ec.})$$

$$- \frac{1}{3}x^3(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ec.})$$

$$+ \frac{1}{4}x^4(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ec.})\ \text{ec.}$$

vale a dire

$$l.\,S = -Mx + \frac{1}{2}x^2(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ec.})$$

$$- \frac{1}{3}x^3(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ec.})$$

$$+ \frac{1}{4}x^4(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ec.})\ \text{ec.}$$

che è la stessa equazione del num. 168. L' equazione adunque della curva A, B, C, D (Fig. 11.) si può rappresentare ancora così

$$l.\,y = -Mx + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \text{ec.}$$

$$-l.\,\overline{1+x}-l.\,\overline{1+\frac{1}{2}x}-l.\,\overline{1+\frac{1}{3}x}-l.\,\overline{1+\frac{1}{4}x}-l.\,\overline{1+\frac{1}{5}x}-\text{ec.}$$

in cui è $M = 0.\ 5772156649015325$, essendosi essa fatta

$= l.\,1 + l.\,\frac{2}{1} + l.\,\frac{3}{2} + l.\,\frac{4}{3} + \text{ec.} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \text{ec.}$ Ora $l.\,1 = 0$, e per trovare le serie, che nascono da $l.\,\frac{2}{1}$, da $l.\,\frac{3}{2}$, da $l.\,\frac{4}{3}$ ec. prendo dal num. CVIII. Tomo IV. la formola generale $l.\,\frac{1+z}{1-z} = \frac{2z}{1} + \frac{2z^3}{3} + \frac{2z^5}{5} + \frac{2z^7}{7} + \frac{2z^9}{9} + \text{ec.}$, poichè faccio $q = 1$ giusta il sistema de' logaritmi iperbolici. Supponendo pertanto $z = \frac{1}{3}$, si ha $l.\,\frac{1+z}{1-z} = l.\,\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = l.\,\frac{4}{2} = l.\,\frac{2}{1} = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \frac{2}{9.3^9} + \text{ec.}$ Facendo $z = \frac{1}{5}$, ne viene $l.\,\frac{1+z}{1-z} = l.\,\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = l.\,\frac{3}{2} = \frac{2}{1.5} + \frac{2}{3.5^3} + \frac{2}{5.5^5} + \frac{2}{7.5^7} + \frac{2}{9.5^9} + \text{ec.}$ Col fare $z = \frac{1}{7}$, si trova $l.\,\frac{1+z}{1-z} = l.\,\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} = l.\,\frac{4}{3} =$

$\frac{2}{1.7}$

$\frac{2}{1 \cdot 7} + \frac{2}{3 \cdot 7^3} + \frac{2}{5 \cdot 7^5} + \frac{2}{7 \cdot 7^7} + \frac{2}{9 \cdot 7^9} +$ ec. ec. Che ſe ſi vorrà ſapere da qual logaritmo naſce la ſerie $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} -$ ec. ſi troverà, che eſſa naſce da $-l.\frac{1}{1-1}$, poichè $-l.\frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} -$ ec., in cui deveſi fare $x=1$: Ma $-l.\frac{1}{1-1} = -l.\infty$; che però un logaritmo infinito corriſpondendo a un numero infinitamente grande, è $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} -$ ec. $= -\infty$.

170. Quantunque l' equazione $l.\,y = -x \times 0.\ 5772156649015325$

$$+x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x \text{ ec.}$$

$$-\,l.\,\overline{1+x} - l.\,1 + \frac{1}{2}x \text{ ec.}$$

ſia propria a eſibire i valori delle ordinate della curva corriſpondenti alle abſciſſe rappreſentate da numeri fratti, al che non ſerve l' equazione $y = 1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots x$ pure baſta avere il valore dell' ordinata corriſpondente ad $x = \frac{1}{2}$, il qual valore è 0. 8862269, per trovare [mediante la natura della curva, quale giuſta il num. 164. è, che ſe all' abſciſſa $x = m$ corriſponde l' ordinata $y = n$, all' abſciſſa $x = m+1$ debba corriſpondere l' ordinata $y = n \times \overline{m+1}$, e all' abſciſſa $x = m-1$ debba corriſpondere l' ordinata $y = \frac{n}{m}$] i valori di tutte le altre ordinate corriſpondenti alle abſciſſe x, i di cui valori ſiano numeri fratti. Così avendo

o.

o. 8862269, che è il valore dell' ordinata corrispondente ad $x = \frac{1}{2}$, se si vorrà il valore dell' ordinata corrispondente ad $x = 1\,\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, esso sarà $\frac{3}{2} \times 0.\,8862269 = 1.\,3293403$: Nello stesso modo si trova, che il valore dell' ordinata corrispondente ad $x = 2\,\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ è $\frac{5}{2} \times 1.\,3293403 = 3.\,3233507$; l' ordinata corrispondente all' abscissa $x = 3\,\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ è $\frac{7}{2} \times 3.\,3233507 = 11.\,6317274$ ec., l' ordinata poi, che compete all' abscissa negativa $= -\frac{1}{2}$ è $\frac{0.\,8862269}{\frac{1}{2}} = +\,1.\,7724538$; l' ordinata corrispondente all' abscissa negativa $= -1\,\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ è $\frac{+\,1.\,7724538}{-\frac{1}{2}} = -3.\,5449076$ ec. L' ordinata che compete ad $x = -1$ è $\frac{+1}{0} = \infty$, siccome è $\frac{\infty}{-1} = -\infty$ l' ordinata corrispondente ad $x = -2$ ec. In questo modo operando si troveranno le ordinate della curva, che convengono alle abscisse sì positive, che negative, tanto intere, che fratte, come segue

Va-

Digitized by Google

Valori delle abſciſſe x	Corriſpondenti valori delle ordinate y
$4.$	$= 24$
$3\frac{1}{2}.$	$= 11.\ 6317274.$
$3.$	$= 6.$
$2\frac{1}{2}.$	$= 3.\ 3233507.$
$2.$	$= 2.$
$1\frac{1}{2}.$	$= 1.\ 3293403.$
$1.$	$= 1.$
$\frac{1}{2}.$	$= 0.\ 8862269.$
$0.$	$= 1.$
$-\frac{1}{2}.$	$= 1.\ 7724538.$
$-1.$	$= \infty.$
$-1\frac{1}{2}.$	$= -3.\ 5449076.$
$-2.$	$= -\infty.$
$-2\frac{1}{2}.$	$= 2.\ 3632718.$
$-3.$	$= \infty.$
$-3\frac{1}{2}.$	$= -0.\ 9453087.$

AR-

ARTICOLO VIII.

Della maniera con cui da una proposta formola eliminare si possono i differenziali secondi, terzi ec., del modo di passare alla supposizione di un differenziale costante in quelle formole, in cui niun differenziale è stato assunto costante, e vice versa; *e di passare da uno alla supposizione di un' altro costante.*

171. Già si è veduta la necessità di assumere un qualche differenziale primo costante, affinchè le formole, nelle quali entrano i differenziali secondi, terzi ec., possano avere un valore determinato; che però supponiamo che da u venga rappresentata quella quantità variabile, il di cui differenziale primo du si prende costante, nel qual caso tutti gli altri differenziali superiori vanno a zero, cioè $d^2u = 0$, $d^3u = 0$, $d^4u = 0$ ec. Comincierò da quelle formole, nelle quali entrando una sola variabile x vi si trova d^2x, d^3x ec. Si ponga pertanto $dx = mdu$; $dm = ndu$; $dn = pdu$, $dp = qdu$ ec. [le lettere m, n, p, q ec. denotano quantità finite date per u, e in appresso dirò, come nel caso particolare se ne determina il valore]. Poichè du si è preso costante, si avrà $d^2x = dm\,du = n\,\overline{du}^2$ (con sostituire il precedente valore di dm, e così in seguito si sostituiscano i valori di dn, dp, dq ec.); $d^3x = d \cdot \overline{du}^2 = p\,\overline{du}^3$; $d^4x = dp\,\overline{du}^3 = q\,\overline{du}^4$ ec. Ora questi valori di d^2x d^3x, d^4x ec. non contengono, che le quantità finite m, n, p, q ec., e le potenze di du; dunque se in vece di d^2x, d^3x ec. si sostituiranno nella formola questi valori, spariranno da essa tutti i differenziali superiori al primo grado: Lo che è ben evidente dover succedere, poichè mediante l' accennata operazione assumendosi la u eguale a una funzione di x, ed eliminandosi per suo mezzo tutti i differenziali di x, siccome si suppone costante du, dalla quale supposizione risultano eguali a zero i di lui differenziali superiori, non possono dalla formola non isparire tutti i differenziali superiori al primo grado, e però rimanere essa espressa da quantità finite unitamente al differenziale du, e alle di lui potenze. Vediamone l' esempio nella seguente formola [A]

$$\frac{axd^3x - x^3dxd^2x + ab\,\overline{dx}^3}{d^2x}.$$ Si ponga $dx = mdu$, onde si avrà

$\overline{dx}^3 = m^3\,\overline{du}^3$; $d^2x = n\,\overline{du}^2$; $d^3x = p\,\overline{du}^3$. Mediante la sostituzione di questi valori di dx, d^2x, d^3x, $\overline{dx}^3$ la formola diventa

$$\frac{apx\,\overline{du}^3 - mnx^2\,\overline{du}^3 + abm^3\,\overline{du}^3}{n\,\overline{du}^2} = \frac{\overline{apx - mnx^2 + abm^3}}{n} \times du.$$

172. Discendiamo a un caso particolare a fine di vedere come si determinino i valori di m, n, p ec., e supponiamo $u = x^3$, e il differenziale primo di x^3 debba esser costante. Differenziando si avrà $du = 3x^2dx$, e $dx = \frac{du}{3x^2}$, onde $m = \frac{1}{3x^2}$, e $dm = -\frac{2dx}{3x^3}$. Ma $dm = ndu = 3nx^2dx$ (con sostituirsi in luogo di du il suo valore $3x^2dx$); dunque $-\frac{2dx}{3x^3} = 3nx^2dx$, da cui si ricava il valore di n, che è $= -\frac{2}{9x^5}$. Si prenda il differenziale di questa equazione $n = -\frac{2}{9x^5}$, e si avrà $dn = \frac{10dx}{9x^6}$: Ora $dn = pdu = 3px^2dx$ [con sostituire il valore di du, che è $3x^2dx$]; quindi $\frac{10dx}{9x^6} = 3px^2dx$, da cui si ottiene il valore di $p = \frac{10}{27x^8}$. Ed ecco nel caso particolare come si determinano i valori di m, n, p, q ec. Si sostituiscano nella formola $\frac{\overline{apx - mnx^2 + abm^3}}{n} \times du$ i ritrovati

valori di m, n, p, ed essa diverrà $\dfrac{\overline{\dfrac{10a}{27x^7}+\dfrac{2}{27x^5}+\dfrac{ab}{27x^6}}}{-\dfrac{2}{9x^5}}\times 3x^2dx$

$=-\overline{5a-x^2-\frac{1}{2}abx}\times dx$. Generalmente se fosse stato $u=x^t$, di cui il differenziale primo sia costante, con fare $du=tx^{t-1}dx$, si avrebbe

$m=\dfrac{1}{tx^{t-1}}$, $dm=\dfrac{\overline{1-t}}{tx^t}\times dx=ndu=tnx^{t-1}dx$, onde $n=\dfrac{1-t}{t^2x^{2t-1}}$, e

$dn=\dfrac{\overline{t-1}\times\overline{2t-1}}{t^2x^{2t}}\times dx=pdu=tpx^{t-1}dx$, e però $p=\dfrac{\overline{t-1}\times\overline{2t-1}}{t^3x^{3t-1}}$ ec.

Onde perchè si è trovato $d^2x=n\overline{du}^2$, e $\overline{du}^2=(tx^{t-1}dx)^2t^2x^{2t-2}\overline{dx}^2$,

con sostituire il valore di n, e di $\overline{du}^2$ si ha $d^2x=\dfrac{\overline{1-t}}{t^2x^{2t-1}}\times\overline{t^2x^{2t-2}\overline{dx}^2}=$

$\overline{dx}^2\ \dfrac{\times\overline{1-t}}{x}$; come pure, perchè $d^3x=p\overline{du}^3$, e $\overline{du}^3=(tx^{t-1}dx)^3=$

$t^3x^{3t-3}\overline{dx}^3$, con sostituire il valore di p, e di $\overline{du}^3$, ne viene

$d^3x=\dfrac{\overline{t-1}\times\overline{2t-1}}{t^3x^{3t-1}}\times t^3x^{3t-3}\overline{dx}^3=\dfrac{\overline{t-1}\times\overline{2t-1}}{x^2}\times\overline{dx}^3$, per lo che

sostituendosi nella formola (A) questi valori di d^2x, d^3x, essa diventa

$a\times$

$$\frac{\frac{a\times\overline{t-1}\times\overline{2t-1}}{x}\times\overline{dx}^3-x\times\overline{1-t}\times\overline{dx}^3+ab\overline{dx}^3}{\frac{\overline{1-t}}{x}\times\overline{dx}^2}=$$

$\overline{\frac{a\times\overline{t-1}\times\overline{2t-1}-x^2\times\overline{1-t}+abx}{1-t}}\times dx$, la quale resta determinata tosto che si determina il valore di t.

173. Se nella formola entreranno due variabili x, y, si prenda costante il differenziale dx, lo che ridurrà la formola a non contener più, che dx, e dy, d^2y, d^3y ec., perchè nella fatta supposizione tutti i differenziali superiori a dx vanno a zero. Ora per far sparire anche i differenziali d^2y, d^3y ec., si ponga $dy=mdx$ ritenendo dx costante, e si operi a norma del num. 122., nel qual modo si troverà $d^2y=dm\,dx=n\overline{dx}^2$, perchè $dm=ndx$; $d^3y=dn\,\overline{dx}^2=p\overline{dx}^3$, perchè $dn=pdx$ ec. Per esempio si abbia la formola [B]

$\frac{x^2\,\overline{dx}^2\,d^2y-ax\,d^4y}{dy}$, con sostituire mdx in luogo di dy, $n\overline{dx}^2$ in vece di d^2y, e $q\overline{dx}^4$ in luogo di d^4y, essa si trasforma in $\overline{\frac{nx^2-aqx}{m}}\times\overline{dx}^3$.

Che se sarà $y=x^t$, e però $dy=mdx=tx^{t-1}dx$, onde risulta $m=tx^{t-1}$; $d^2y=n\overline{dx}^2=ndx\times dx$, dove perchè $ndx=dm=t\times\overline{t-1}\times x^{t-2}dx$, si ha $n\overline{dx}^2=t\times\overline{t-1}\times x^{t-2}\overline{dx}^2$, conseguentemente $n=t\times\overline{t-1}\times x^{t-2}$; nello stesso modo da $d^3y=p\overline{dx}^3$ si ricava $p=t\times\overline{t-1}\times\overline{t-2}\times x^{t-3}$, da $d^4y=q\overline{dx}^4$ si ha $q=t\times\overline{t-1}\times\overline{t-2}\times\overline{t-3}\times x^{t-4}$ ec. Per lo che se nella formola [B] si sostituiranno i valori di dy, d^2y, d^4y, essa si cambierà nella seguente

 $t\times$

Digitized by Google

$$\frac{t \times \overline{t-1} \times x^{t}\, \overline{dx}^{4} - a \times t \times \overline{t-1} \times \overline{t-2} \times \overline{t-3} \times x^{t-3}\, \overline{dx}^{4}}{t x^{t-1} dx} =$$

$\overline{\overline{t-1} \times x - a \times \frac{\overline{t^3 - 6t^2 + 11t - 6}}{x^2}} \times \overline{dx}^{3}$. Se si porrà $t=4$ nella supposizione di $y = x^4$, la formola diverrà $\overline{3x - 6x^{-2}} \times \overline{dx}^{3}$. Collo stesso metodo si sarebbe operato, se in vece di dx fosse stato assunto costante dy, nel qual caso si sarebbe posto $dx = m dy$; $d^2 x = n \overline{dy}^{2}$; $d^3 x = p \overline{dy}^{3}$ ec.

174 Molte volte in vece di prendere costante dx, o dy, si prende costante qualche altro elemento, come sarebbe ydx, che come in seguito vedremo rappresenta l' elemento infinitamente piccolo dell' area di una curva; o pure si prende costante $\sqrt{\overline{dx}^{2} + \overline{dy}^{2}}$, che come pure a suo luogo vedremo, è l' espressione d' una porzione d' arco infinitamente piccola di curva: Nell' uno, e nell' altro caso si trovano nelle formole i differenziali d^2x, d^3x, d^4x ec.. e d^2y, d^3y, d^4y ec., che bisogna eliminare. Per farlo si ponga al solito $dy = mdx$; $dm = ndx$; $dn = pdx$; $dp = qdx$ ec.: Ma perchè si prende costante l' elemento ydx, sarà eguale a zero il suo differenziale, cioè $dydx + yd^2x = 0$, da cui si ricava $d^2x = -\frac{dydx}{y} = -\frac{m\overline{dx}^{2}}{y}$ mediante il sostituire mdx in luogo di dy, cui si è fatto eguale. Ora per trovare i valori degli altri differenziali d^3x d^4x ec. si prevalga di questa equazione $d^2x = -\frac{m\overline{dx}^{2}}{y}$ col differenziarla successivamente, osservando che essendo stato assunto costante ydx, le quantità y, m, dx sono tutte variabili. Si differenzi pertanto questa equazione $d^2x = -\frac{m\overline{dx}^{2}}{y}$ e si avrà

$$d^3x = -\frac{ydm\overline{dx}^{2} - 2ymdxd^2x + mdy\overline{dx}^{2}}{y^2} = -\frac{n\overline{dx}^{3}}{y} + \frac{3m^2\overline{dx}^{3}}{y^2}$$

mediante il sostituire il valore di dm, che è ndx, il valore di d^2x, che è

$-\frac{m\overline{dx}^2}{y}$, e il valore di dy, che è mdx. Si differenzi in seguito l'equazione $d^3x = -\frac{n\overline{dx}^3}{y} + \frac{3m^2\overline{dx}^3}{y^2}$, e si avrà

$$d^4x = -\frac{ydn\overline{dx}^3 - 3yn\overline{dx}^2\,d^2x + ndy\overline{dx}^3}{y^2} + \frac{6y^2mdm\overline{dx}^3 + 9y^2m^2\overline{dx}^2\,d^2x - 6m^2ydy\overline{dx}^3}{y^4}$$

$$= -\frac{p\overline{dx}^4}{y} + \frac{10mn\overline{dx}^4}{y^2} - \frac{15m^3\overline{dx}^4}{y^3}$$ mediante il sostituire il valore di dn, che è pdx, di d^2x, che è $-\frac{m\overline{dx}^2}{y}$, di dy, che è mdx, e di dm che è ndx. Collo stesso metodo si determinino i valori degli altri differenziali superiori d^5x ec. Essendosi pertanto trovati i valori di d^2x, d^3x, d^4x ec., si cerchino adesso i valori di d^2y, d^3y, d^4y ec. Questi si trovano mediante la successiva differenziazione dell'equazione $dy = mdx$, in cui niuna quantità è costante. Si differenzi adunque, e si avrà $d^2y = dmdx + md^2x = n\overline{dx}^2 + md^2x$ con sostituire ndx in luogo di dm, che si riduce a $d^2y = \overline{n - \frac{m^2}{y}} \times \overline{dx}^2$ con sostituire $-\frac{m\overline{dx}^2}{y}$ in vece di d^2x. Si differenzi questa equazione

d^3y

Digitized by Google

$d^2y = \overline{n - \frac{m^2}{y}} \times \overline{dx}^2$, e ne verrà

$d^3y = \overline{\frac{dn - 2ym\,dm + m^2\,dy}{y^2}} \times \overline{dx}^2 + 2\,dx\,d^2x \times \overline{n - \frac{m^2}{y}}$, che si riduce a

$d^3y = \overline{p - \frac{4mn}{y} + \frac{3m^3}{y^2}} \times \overline{dx}^3$ con sostituire pdx in luogo di dn; ndx in vece di dm; mdx in vece di dy, e finalmente $-\frac{m\,\overline{dx}^2}{y}$ in luogo di d^2x. Per trovare il valore di d^4y si differenzi questa equazione $d^3y = \overline{p - \frac{4mn}{y} + \frac{3m^3}{y^2}} \times \overline{dx}^3$, e si troverà

$$d^4y = \overline{\frac{dp - 4yn\,dm - 4ym\,dn + 4mn\,dy}{y^2} + \frac{9y^2m^2\,dm - 6m^3y\,dy}{y^4}} \times \overline{dx}^3$$

$$+ 3\,\overline{dx}^2\,d^2x \times \overline{p - \frac{4mn}{y} + \frac{3m^3}{y^2}} =$$

$\overline{q - \frac{4n^2}{y} - \frac{7mp}{y} + \frac{25m^2n}{y^2} - \frac{15m^4}{y^3}} \times \overline{dx}^4$ con sostituire qdx in vece di dp; ndx in luogo di dm, pdx in vece di dn; mdx in luogo di dy; e finalmente $-\frac{m\,\overline{dx}^2}{y}$ in vece di d^2x.

175. Ritrovati essendosi nel modo esposto i valori di d^2x, d^3x ec., e di d^2y, d^3y ec., se si sostituiranno nella formola, in cui si vuole ydx costante, si elimineranno dalla medesima tutti i differenziali tanto di x, che di y superiori al

al primo grado. Sia per esempio la formola $\frac{ayd^2y + adydx - yd^2x}{dydx}$, nella quale si sostituisca $\overline{n - \frac{m^2}{y}} \times \overline{dx}^2$ in vece di d^2y; mdx in luogo di dy, e $-\frac{m\,\overline{dx}^2}{y}$ in vece di d^2x, e ciò la farà cambiare in $\frac{any - am^2 + am + m}{m}$.

176. Qualora si prende costante $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, per ritrovare i valori di d^2x, d^3x ec., e di d^2y, d^3y ec., da sostituirsi nella formola, si faccia così: Si ponga al solito $dy = mdx$; $dm = ndx$, $dn = pdx$ ec., onde con sostituire nell' espressione $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ in luogo di $\overline{dy}^2$ il suo valore $m^2\overline{dx}^2$, essa diventa $\sqrt{\overline{dx}^2 + m^2\overline{dx}^2} = dx\sqrt{1 + m^2}$. Ora perchè essa è costante, il di lei differenziale è eguale a zero. Si differenzi pertanto, e si avrà

$$d^2x\sqrt{1 + m^2} + \frac{m\,dm\,dx}{\sqrt{1 + m^2}} = 0,$$ cioè [con sostituire ndx in luogo di dm]

$$d^2x\sqrt{1 + m^2} + \frac{mn\,\overline{dx}^2}{\sqrt{1 + m^2}} = 0,$$ da cui si ricava $d^2x = -\frac{mn\,\overline{dx}^2}{1 + m^2}$. Prendendo susseguentemente gli altri differenziali di $dx\sqrt{1 + m^2}$, si otterranno i valori di d^3x, d^4x ec.. A tale effetto si differenzi l' equazione

d^2x

$d^2x = -\frac{mn\,\overline{dx}^2}{1+m^2}$, e ne verrà $d^3x =$

$$-\frac{[1+m^2]\,ndm\overline{dx}^2 - [1+m^2]\,mdn\overline{dx}^2 - [1+m^2]\,2mndxd^2x + 2m^2ndm\,\overline{dx}^2}{\overline{1+m^2}^2}$$

$$= -\overline{\frac{n^2}{1+m^2} - \frac{mp}{1+m^2} + \frac{4m^2n^2}{\overline{1+m^2}^2}} \times \overline{dx}^3$$

$= -\overline{\frac{m^2}{1+m^2} + \frac{3m^2n^2 - n^2}{\overline{1+m^2}^2}} \times \overline{dx}^3$, con sostituire il valore di dm, che è ndx, di dn, che è pdx, e di d^2x, che è $-\frac{mn\,\overline{dx}^2}{1+m^2}$. In oltre se si differenzierà questa equazione $d^3x = -\overline{\frac{mp}{1+m^2} + \frac{3m^2n^2 - n^2}{\overline{1+m^2}^2}} \times \overline{dx}^3$,

si avrà $d^4x = \left(-\frac{mdp}{1+m^2} - \frac{pdm}{1+m^2} + \frac{2m^2pdm}{\overline{1+m^2}^2} + \frac{6mn^2dm}{\overline{1+m^2}^2} + \right.$

$$\left.\frac{6m^2ndn}{\overline{1+m^2}^2} - \frac{12m^3n^2dm}{\overline{1+m^2}^3} - \frac{2ndn}{\overline{1+m^2}^2} + \frac{4mn^2dm}{\overline{1+m^2}^3}\right)\overline{dx}^3 +$$

$$3\overline{dx}^2\, d^2x \times \overline{-\frac{mp}{1+m^2} + \frac{3m^2n^2}{\overline{1+m^2}^2} - \frac{n^2}{\overline{1+m^2}^2}} = -\frac{mq\,\overline{dx}^4}{1+m^2}$$

$$-\frac{3np\,\overline{dx}^4}{\overline{1+m^2}^2} + \frac{12m^2np\,\overline{dx}^4}{\overline{1+m^2}^2} + \frac{13mn^3\overline{dx}^4}{\overline{1+m^2}^3} - \frac{15m^3n^3\,\overline{dx}^4}{\overline{1+m^2}^3}.$$

Re-

Restano a trovarsi i valori di d^2y, d^3y ec., che tutti si dedurranno dall'equazione $dy = mdx$ replicatamente differenziata. Di fatto si ha $d^2y = dmdx + md^2x$

$$= n\overline{dx}^2 - \frac{m^2 n \overline{dx}^2}{1 + m^2} = \frac{n\overline{dx}^2}{1 + m^2}$$

mediante la sostituzione dei valori di dm, e di d^2x; $d^3y =$

$$\frac{\overline{1 + m^2} \times \overline{dn\overline{dx}^2 + 2ndxd^2x} - 2mn\overline{dx}^2 dm}{\overline{1 + m^2}^2} = \overline{\frac{p}{1+m^2} - \frac{4mn^2}{\overline{1+m^2}^2}} \times \overline{dx}^3$$

mediante le solite sostituzioni;

$$d^4y = \frac{dp\overline{dx}^3}{1 + m^2} - \frac{2mp\,dm\,\overline{dx}^3}{\overline{1 + m^2}^2} - \frac{4n^2dm\,\overline{dx}^3}{\overline{1+m^2}^2} - \frac{8mndn\,\overline{dx}^3}{\overline{1 + m^2}^2} +$$

$$\frac{16m^2n^2dm\,\overline{dx}^3}{\overline{1 + m^2}^3} + 3\overline{dx}^2 d^2x \times \overline{\frac{p}{1 + m^2} - \frac{4mn^2}{\overline{1 + m^2}^2}} =$$

$$\overline{\frac{q}{1 + m^2} - \frac{13mnp}{\overline{1+m^2}^2} - \frac{4n^3}{\overline{1+m^2}^2} + \frac{28m^2n^3}{\overline{1+m^2}^3}} \times \overline{dx}^4.$$

177. Dopo ciò niente altro rimane a farsi, che sostituire nella formola i ritrovati valori di d^2x, d^3x ec., d^2y, d^3y ec., e con ciò dalla medesima si elimineranno i differenziali di x, e y superiori al primo grado. Sia proposta a cagion d'

esempio la formola $\frac{a^2dx\,d^2x - ydy\overline{dx}^2 - y\overline{dy}^3}{dy\,d^2y}$, in cui si è preso costante

$\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Vi si sostituiscano i valori di dy, d^2x, d^2y, e $\overline{dy}^3$, e fatto ciò

essa diverrà $-\frac{\frac{a^2mn\overline{dx}^3}{1+m^2} - my\overline{dx}^3 - ym^3\overline{dx}^3}{\frac{mn\overline{dx}^3}{1+m^2}} = -a^2 - \frac{y - 2m^2y - m^4y}{n}$.

178. Dopo avere esposto in che modo da una proposta formola si possano eliminare i differenziali secondi, terzi ec. con introdurvi in loro vece le quantità finite m, n, p, q, r ec., ora dirò brevemente come *viceversa* data una formola, nella quale entrino le quantità m, n, p ec., si possa passare alla prima formola con eliminare le m, n, p ec., e introdurvi i differenziali secondi, terzi ec. Il modo d' operare è evidente per se stesso, niente altro richiedendosi, che sostituire in luogo di m, n, p ec. quei valori espressi da' differenziali, che nelle formole la loro introduzione ha fatto sparire. Tutto adunque consiste a trovare questi valori di m, n, p ec., che devonsi in loro vece sostituire. Questi poi ci vengono esibiti dalle equazioni $dy = mdx$, $d^2y = dmdx = n\overline{dx}^2$; $d^3y = dn\overline{dx}^2 = p\overline{dx}^3$, che si sono prese al num. 138., e che dispongo così $m = \frac{dy}{dx}$; $n = \frac{dm}{dx}$; $p = \frac{dn}{dx}$ ec.. Si prenda dx costante, e si avranno i seguenti valori di m, n, p ec.

179. Valori di m, n, p, q ec., nell' ipotesi di dx costante

$$m = \frac{dy}{dx}$$

$$n = \frac{dm}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$p = \frac{dn}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$$

$$r = \frac{dq}{dx} = \frac{d^5y}{dx^5} \text{ ec.}$$

Digitized by Google

180. Valori di m, n, p ec., nell'ipotesi di dy costante

$$m = \frac{dy}{dx}$$

$$n = \frac{dm}{dx} = - \frac{dy\, d^2x}{\overline{dx}^3}$$

$$p = \frac{dn}{dx} = - \frac{dy\, dx\, d^3x + 3dy\, \overline{d^2x}^2}{\overline{dx}^5}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{10dx\, dy\, d^2x\, d^3x - dy\, \overline{dx}^2\, d^4x - 15dy\, \overline{d^2x}^3}{\overline{dx}^7}$$

$$r = \frac{dq}{dx} = - \frac{105dy\, dx\, \overline{d^2x}^2\, d^3x + 10dy\, \overline{dx}^2\, \overline{d^3x}^2}{\overline{dx}^9}$$

$$+ \frac{15dy\, \overline{dx}^2\, d^2x\, d^4x - dy\, \overline{dx}^3\, d^5x + 105dy\, \overline{d^2x}^4}{\overline{dx}^9} \text{ ec.}$$

181.

Digitized by Google

181. Valori di m, n, p ec., nell' ipotesi di nessuna costante

$$m = \frac{dy}{dx}$$

$$n = \frac{dm}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{\overline{dx}^3}$$

$$p = \frac{dn}{dx} = \frac{\overline{dx}^2\,d^3y - 3dx\,d^2x\,d^2y + 3dy\,\overline{d^2x}^2 - dx\,dy\,d^3x}{\overline{dx}^5}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{\overline{dx}^3\,d^4y - 6\overline{dx}^2\,d^2x\,d^3y - 4\overline{dx}^2\,d^2y\,d^3x}{\overline{dx}^7}$$

$$+ \frac{15dx\,\overline{d^2x}^2\,d^2y + 10dy\,dx\,d^2x\,d^3x - 15dy\,\overline{d^2x}^3 - \overline{dx}^2\,dy\,d^4x}{\overline{dx}^7} \text{ ec.}$$

182. Qualora pertanto sarà proposta una formola, nella quale entrino le quantità m, n, p ec., e si vogliano rimettere nella medesima i differenziali secondi, terzi ec., in tal caso o si vuole, che dx sia costante, e in allora si dovrà prevalere dei valori di m, n, p ec., presi dal num. 179., o si vuole, che sia costante dy, e si dovrà far uso di quelli del num. 180.; o finalmente nessun differenziale si vuol prender costante, e a ciò serviranno i valori presi dal num. 181.

183. Sia data per esempio la formola $\frac{\overline{nx^2 - aqx}}{m} \times \overline{dx}^3$ del num. 173., e si vogliano rimettere nella medesima i differenziali superiori, nell' ipotesi però di dx costante. Si prendano dal num. 130. i valori di m, n, q, e nella medesima si so-

stitui-

stituiscano, e con ciò essa diverrà $\dfrac{\overline{\dfrac{x^2 d^2 y}{\overline{dx}^2} - \dfrac{axd^4 y}{\overline{dx}^4}} \times \overline{dx}^3}{\dfrac{dy}{dx}} =$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{x^2 \overline{dx}^2\, d^2 y - ax\, d^4 y}}{\overline{dx}^4}}{\dfrac{dy}{dx}} \times \overline{dx}^3 = \dfrac{x^2 \overline{dx}^2\, d^2 y - axd^4 y}{dy}$$

, che è la stessa formola proposta al citato num. 124.

184. Veniamo ora alla maniera d'operare per passare all'ipotesi di qualche elemento costante in quelle formole, in cui niuno è stato assunto tale. Niuna cosa è più facile a farsi d'un tale passaggio: Poichè con prendersi costante il differenziale di qualche quantità, tutti i differenziali superiori di tale quantità vanno a zero, se in qualche formola, in cui niun differenziale è stato preso costante, si vorrà costante dx, in tal caso si dovranno nella medesima ridurre a zero tutti quei termini, ne' quali entra d^2x, d^3x ec.; e per la stessa ragione si dovranno ridurre a zero tutti i termini, ne' quali entra d^2y, d^3y ec., qualora si voglia costante dy,

Sia data per esempio la formola $4\overline{dx}^2 + 4xd^2x + 2dx\,dy + xd^2y + yd^2x$. in cui nessun differenziale è stato preso costante, e si voglia costante dx: Si tolgano i termini $4xd^2x$, yd^2x, e si avrà $4\overline{dx}^2 + 2dxdy + xd^2y$ relativamente alla fatta ipotesi. Se si avesse voluto costante dy, la formola sarebbe divenuta $4\overline{dx}^2 + 4xd^2x + 2dxdy + yd^2x$.

185. Se in vece di prendere costante dx, o dy, si volesse costante d^2x, o d^2y, bisognerebbe cancellare dalla formola tutti quei termini, ne' quali ha luogo d^3x, d^4x ec., o d^3y, d^4y ec.. Ifstessamente se si volesse costante d^3x, o d^3y, bisognerebbe cancellare tutti i termini, ne' quali entra d^4x, d^5x ec., o d^4y, d^5y ec.

186. Poniamo adesso, che si voglia costante il differenziale primo di x^m: Si differenzi questa quantità, e si avrà $mx^{m-1}dx$, che differenziata dà

$m \times \overline{m-1} \times x^{m-2}\overline{dx}^2 + mx^{m-1}d^2x$, che deve essere eguale a zero, perchè (per ipotesi) è costante il differenziale primo di x^m. Si ha adunque

$m \times \overline{m-1} \times x^{m-2}\overline{dx}^2 + mx^{m-1}d^2x = 0$, e però $d^2x =$

—

$$-\overline{m+1}\times x^{-1}\overline{dx}^2;\ d^3x = \frac{\overline{m-1}}{x^2}\times\overline{dx}^3 \dot{-} 2\times\overline{m-1}\times x^{-1}dx\,d^2x$$

$$= \frac{\overline{m-1}}{x^2}\times\overline{dx}^3 + 2\times -\overline{m+1}^2\times x^{-2}\,\overline{dx}^3,$$ con sostituire il valore di d^2x; $d^4x =$ ec.. Ora nella formola si sostituiscano questi valori di d^2x, d^3x ec., e con ciò essa si trasmuterà in un'altra, in cui sarà costante il differenziale primo di x^m.

187. Parimente debba essere costante ydx. Si differenzi questa quantità, e si avrà $dydx + yd^2x$, che deve essere eguale a zero a motivo della fatta ipotesi: Onde essendo $dydx + yd^2x = 0$; si ottiene $d^2x = -\dfrac{dydx}{y}$.

Si differenzi ancora questa equazione, e ne verrà $d^3x =$

$$-\frac{ydyd^2x - ydxd^2y + dx\,\overline{dy}^2}{y^2} = -\frac{2dyd^2x - dxd^2y}{y}$$ mediante il sostituire $-ydyd^2x$ in luogo di $dx\,\overline{dy}^2$, cui è eguale, come si ricava dall' equazione $yd^2x + dxdy = 0$ con moltiplicarla per dy, onde ne viene $ydyd^2x + dx\,\overline{dy}^2 = 0$, da cui si ricava $dx\,\overline{dy}^2 = -ydyd^2x$: In oltre si differenzi l'equazione $d^3x = -\dfrac{2dyd^2x - dxd^2y}{y}$, e si avrà $d^4x =$

$$-\frac{3yd^2xd^2y - 2ydyd^3x + 2\overline{dy}^2\,d^2x - ydxd^3y + dydxd^2y}{y^2}.$$ Proseguendo a differenziare si troverà il valore di d^5x ec. Essendosi pertanto trovati i valori di d^2x, d^3x, d^4x ec. dedotti dall' espressione ydx successivamente differenziata, essi si sostituiscano nella proposta formola, in cui si vuole costante ydx, e con ciò verransi vicendevolmente a distruggere tutti i termini, che nella formola sono nati dalla differenziazione di ydx, conseguentemente nella risultante formola sarà ydx

co-

costante. Sia data per esempio la formola $2x\overline{dx}^2 + x^2d^2x + y\overline{dx}^2 - xdxdy + xyd^2x - x^2d^2y$, in cui nessun elemento è stato preso costante, e si voglia costante ydx. Si sostituisca nella medesima $-\frac{dxdy}{y}$ in luogo di d^2x, e con ciò essa si cambierà nella seguente

$2x\overline{dx}^2 - \frac{x^2dxdy}{y} + y\overline{dx}^2 - 2xdxdy - x^2d^2y$, in cui è costante ydx; di fatto essa nasce dalla differenziazione della formola $x^2dx + xydx - x^2dy$, o sia $\frac{x^2ydx}{y} + xydx - x^2dy$, in cui si assume costante ydx.

188. Se si vorrà costante $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, si trovino col differenziare successivamente questa espressione i valori di d^2x, d^3x ec, o pure di d^2y, d^3y ec., e si sostituiscano nella formola proposta, con che essa si cambierà in un altra equivalente, nella quale sarà costante $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. E qui per trovare mediante questa espressione i valori di d^2x, d^3x ec., o di d^2y, d^3y ec, si osservi, che essendo costante una quantità, sarà pure costante qualunque sua potestà; onde prendendosi costante $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, sarà non meno costante $\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2$. Si differenzi questa espressione successivamente, e si troveranno i seguenti valori

$$d^2x = -\frac{dyd^2y}{dx} \qquad d^2y = -\frac{dxd^2x}{dy}$$

$$d^3x = -\frac{\overline{d^2y}^2 - dyd^3y - \overline{d^2x}^2}{dx} \qquad d^3y = -\frac{\overline{d^2x}^2 - dxd^3x - \overline{d^2y}^2}{dy}$$

$$d^4x = -\frac{3d^2yd^3y - dyd^4y - 3d^2xd^3x}{dx} \qquad d^4y = -\frac{3d^2xd^3x - dxd^4x - 3d^2yd^3y}{dy}$$

Nella formola proposta, in cui niun differenziale era assunto costante, si sostituiscano i ritrovati valori di d^2x, d^3x ec., ò pure di d^2y, d^3y ec., e da tale sostituzione ne risulterà un'altra formola equivalente in cui sarà costante $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$.

Sia

Sia data per esempio la formola $adxdy + axd^2y + 2xdx\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} + x^2 \times \frac{dxd^2x + dyd^2y}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$, nella quale nessun differenziale è stato preso costante, e si voglia costante $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Si sostituisca nella medesima $-\frac{dyd^2y}{dx}$ in luogo di d^2x, e con ciò andrà a zero il termine $x^2 \times \frac{dxd^2x + dyd^2y}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$, rimanendo $adxdy + axd^2y + 2xdx\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, che è la formola cercata equivalente alla proposta, in cui $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ è costante. Di fatto l'una, e l'altra nasce dal differenziarsi l'espressione $axdy + x^2\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$: la prima allorchè nessun elemento si prende costante, la seconda allorchè si prende costante $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$.

189. Si opererà relativamente alla maniera praticata fin'ora, se qualunque altra quantità ad arbitrio si vorrà prender costante.

190. Può accadere, che col prender costante qualche quantità in una formola, nella quale nessun elemento era stato assunto costante, si distruggano vicendevolmente tutti i di lei termini, o pure distruggendosene alcuni, rimanga soltanto quella quantità, che era stata supposta costante. Ogniqualvolta ciò succederà, sarà segno, che la quantità, la quale si è supposta costante, è necessariamente costante, ed eguale a zero.

191. Basta rifletter alcun poco alle cose antecedentemente dette per rilevare come debbasi operare per passare da una formola, in cui qualche elemento è stato assunto costante, a un'altra equivalente, nella quale nessun elemento sia costante. Si è detto al num. 122., che per eliminare da una formola i differenziali d^2y, d^3y ec., si deve sostituire $n\overline{dx}^2$ in vece di d^2y; in luogo di d^3y si deve sostituire $p\overline{dx}^3$ ec.; e al num. 129. si è detto, che per introdurre di nuovo nella formola i differenziali secondi, terzi ec., basta sostituire nella medesima i valori di n, p, q ec.; che però se pei valori di n, p, q ec. si prenderanno quelli del num.

132., col sostituire nella formola gli accennati valori di d^2y, d^3y ec., si verrà quindi a passare dalla proposta formola, nella quale dx era presa costante, ad un' altra formola equivalente, in cui nessun differenziale sarà costante. Quello che ho detto dei valori di d^2y, d^3y in caso, che la costante sia dx, si intenda dei valori di d^2x, d^3x, qualora sia costante dy. Sostituendo pertanto in luogo di n, p, q. ec. i loro valori presi dal num. 132., si ritroveranno i seguenti valori di d^2y, d^3y ec., da rimettersi in loro vece nella formola, in cui niun differenziale si vuole costante.

192. Valori di d^2y, d^3y ec. da sostituire nelle formole, in cui un differenziale dx è costante, per passare all'ipotesi di nessuna costante.

$$d^2y = n\,\overline{dx}^2 = d^2y - \frac{dyd^2x}{dx}$$

$$d^3y = p\,\overline{dx}^3 = d^3y - \frac{3d^2xd^2y}{dx} + \frac{3dy\,\overline{d^2x}^2}{\overline{dx}^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$$

$$d^4y = q\,\overline{dx}^4 = d^4y - \frac{6d^2xd^3y}{dx} - \frac{4d^2yd^3x}{dx} + \frac{15\,\overline{d^2x}^2\,d^2y}{\overline{dx}^2} +$$

$$\frac{10dyd^2xd^3x}{\overline{dx}^2} - \frac{15dy\,\overline{d^2x}^3}{\overline{dx}^3} - \frac{dyd^4x}{dx} \text{ ec.}$$

193.

Digitized by Google

193. I valori di d^2x, d^3x ec. da sostituirsi per lo stesso fine, allorchè dy è costante, sono

$$d^2x = n'\,\overline{dy}^2 = d^2x - \frac{dxd^2y}{dy}$$

$$d^3x = p'\,\overline{dy}^3 = d^3x - \frac{3d^2xd^2y}{dy} + \frac{3dx\,\overline{d^2y}^2}{\overline{dy}^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$$

$$d^4x = q'\,\overline{dy}^4 = d^4x - \frac{6d^2yd^3x}{dy} - \frac{4d^2xd^3y}{dy} + \frac{15\,\overline{d^2y}^2\,d^2x}{\overline{dy}^2} +$$

$$\frac{10dxd^2yd^3y}{\overline{dy}^2} - \frac{15dx\,\overline{d^2y}^3}{\overline{dy}^3} - \frac{dxd^4y}{dy} \text{ ec.}$$

194. Se adunque sarà proposta una formola, in cui dx sia stato preso costante, nel qual caso vi si troverà soltanto il differenziale primo dx, o le sue potestà insieme coi differenziali d^2y, d^3y ec., e si voglia passare a un' altra formola equivalente, nella quale nessun differenziale sia costante, basterà sostituire nella medesima in vece di d^2y, d^3y ec. i suoi valori presi dal num. 176, e la formola, che con ciò risulterà, sarà la ricercata, in cui nessun differenziale sarà costante. Se poi nella formola sarà stato preso costante dy, in allora, perchè coi differenziali d^2x, d^3x ec. non vi si troverà, che il differenziale primo dy, o le sue potenze, non avrassi che a sostituire in luogo di d^2x, $d\,x$ ec. i suoi valori presi dal num. 177. La regola è tanto evidente per se, che non abbisogna d' esempio.

195. Supponiamo adesso, che si sia preso costante l'elemento ydx, e che nella formola, la quale si vuol trasmutare in un' altra, in cui nessun elemento sia costante, contengansi i differenziali d^2x, d^3x ec., d^2y, d^3y ec. Per fare questa trasmutazione, bisogna trovare i valori di d^2x, d^3x ec., d^2y, d^3y ec., che in loro vece sostituiti nella formola, introducano tutti i differenziali cercati. Riteniamo l' espressione di $dy = mdx$, e però $m = \frac{dy}{dx}$. Si differenzi l' elemento ydx, e si avrà $dydx + yd^2x = 0$ (perchè egli è supposto costante), onde si deduce $d^2x = -\frac{dydx}{y} = -\frac{m\,\overline{dx}^2}{y}$, con sostituire $m\,dx$ in luogo di dy. Si differenzi

questa equazione $d^2x = -\frac{m\overline{dx}^2}{y}$, e si avrà $d^3x =$

$$-\frac{dm\overline{dx}^2}{y} - \frac{2mdxd^2x}{y} + \frac{mdy\overline{dx}^2}{y^2} = -\frac{n\overline{dx}^3}{y} + \frac{2m^2\overline{dx}^3}{y^2}$$

$+\frac{mdy\overline{dx}^2}{y^2}$, con sostituire il valore di dm, che è ndx (pel num. 122.), e il poc' anzi trovato valore di d^2x, che è $-\frac{m\overline{dx}^2}{y}$: Che se di nuovo vi si sostituirà il valore di m, che è $\frac{dy}{dx}$, e il valore di n preso dal num. 132, si avrà finalmente $d^3x = \frac{dyd^2x}{y} - \frac{dxd^2y}{y} + \frac{3dx\overline{dy}^2}{y^2}$. Nello stesso modo con differenziare l'equazione $d^3x = -\frac{n\overline{dx}^3}{y} + \frac{2m^2\overline{dx}^3}{y^2} +$ $\frac{mdy\overline{dx}^2}{y^2}$, indi sostituire i valori opportuni, si otterrà il valore di d^4x. Quanto all' invenzione de' valori di d^2y, d^3y ec. si riprenda l' elemento ydx, che si differenzi, e si avrà $dydx + yd^2x = 0$, da cui si ricava $dy = -\frac{yd^2x}{dx} = +mdx$ con sostituire $-\frac{m\overline{dx}^2}{y}$ in luogo di d^2x. Si differenzi questa equazione $dy = +mdx$, e ne verrà $d^2y = +dmdx + md^2x = +n\overline{dx}^2 - \frac{m^2\overline{dx}^2}{y}$ con so-

sostituire $n\,dx$ in luogo di dm, e $-\frac{m\overline{dx}^2}{y}$ in vece di d^2x. Vi si sostituisca pertanto il valore di n preso dal num. 132, e il valore di m^2, che è $\frac{\overline{dy}^2}{\overline{dx}^2}$, e con ciò l'equazione si cambierà in $d^2y = d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx} - \frac{\overline{dy}^2}{y}$. Si differenzi ora l'equazione $d^2y = -n\overline{dx}^2 + \frac{m^2\overline{dx}^2}{y}$, e si avrà $d^3y =$

$$-dn\overline{dx}^2 - 2n\,dx\,d^2x + \frac{2m\,dm\overline{dx}^2}{y} + \frac{2m^2dx\,d^2x}{y} - \frac{m^2dy\overline{dx}^2}{y^2} =$$

$$-p\overline{dx}^3 + \frac{4mn\overline{dx}^3}{y} - \frac{2m^3\overline{dx}^3}{y^2} - \frac{m^2dy\overline{dx}^2}{y^2}$$, con sostituire $p\,dx$ in luogo di dn, e $-\frac{m\overline{dx}^2}{y}$ in vece di d^2x, e finalmente $n\,dx$ in luogo di dm. Che se ora si sostituirà il valore di m, che è $\frac{dy}{dx}$, e i valori di p, ed n presi dal num. 132, si avrà per ultimo $d^3y = d^3y - \frac{3d^2x\,d^2y}{dx} + \frac{3dy\overline{d^2x}^2}{\overline{dx}^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx} -$

$$\frac{4dy\,d^2y}{y} + \frac{4\overline{dy}^2d^2x}{y\,dx} + \frac{3\overline{dy}^3}{y^2}$$. Se si differenzierà l'equazione

$d^3y = -p\overline{dx}^3 + \frac{4mn\overline{dx}^3}{y} - \frac{2m^3\overline{dx}^3}{y^2} - \frac{m^2dy\overline{dx}^2}{y^2}$, indi si faccia la sostituzione degli opportuni valori, si ritroverà in tal modo il valore di d^4y.

Digitized by Google

196. Determinati adunque essendo così i valori di d^2x, d^3x ec., e di d^2y, d^3y ec., si sostituiscano essi nella formola, in cui era stato preso $y\,dx$ costante, e da tale sostituzione risulterà un'altra formola equivalente, in cui nessun elemento sarà costante, come si cercava,

197. Valori di d^2x, d^3x da sostituirsi nell'ipotesi di $y\,dx$ costante

$$d^2x = -\frac{dx\,dy}{y}$$

$$d^3x = \frac{dy\,d^2x}{y} - \frac{dx\,d^2y}{y} + \frac{3\,dx\,\overline{dy}^2}{y^2}$$

198. Valori di d^2y, d^3y da sostituirsi allorchè nella formola è stato preso costante $y\,dx$

$$d^2y = d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx} - \frac{\overline{dy}^2}{y}$$

$$d^3y = d^3y - \frac{3\,d^2x\,d^2y}{dx} + \frac{3\,dy\,\overline{d^2x}^2}{\overline{dx}^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx} - \frac{4\,dy\,d^2y}{y} + \frac{4\,\overline{dy}^2\,d^2x}{y\,dx}$$

$$+ \frac{3\,\overline{dy}^3}{y^2}.$$

199. Veniamo per ultimo al caso, in cui nella formola essendo stato preso costante l'elemento $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, si voglia passare a un'altra formola equivalente, nella quale nessun elemento sia costante. Ciò noi otterremo facilmente mediante il sostituire nella formola proposta i valori di d^2x, d^3x ec., d^2y, d^3y ec.

tro-

Digitized by Google

trovati al num. 127, che sono $d^2x = -\frac{mn\overline{dx}^2}{1+m^2}$; $d^3x =$

$$-\overline{\frac{mp}{1+m^2} + \frac{3m^2n^2 - n^2}{\overline{1+m^2}^2}} \times \overline{dx}^3$$

ec.: $d^2y = \frac{n\overline{dx}^2}{1+m^2}$;

$$d^3y = \overline{\frac{p}{1+m^2} - \frac{4mn^2}{\overline{1+m^2}^2}} \times \overline{dx}^3$$

, ne' quali se in vece delle lettere m, n, p si sostituiranno i loro valori presi dal num. 132., si avrà

$$d^2x = -\frac{dx\,dy\,d^2y + \overline{dy}^2 d^2x}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$$

$$d^3x = -\frac{dx\,dy\,d^3y + \overline{dy}^2 d^3x}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} +$$

$$\frac{3dx\,\overline{dy}^2\,\overline{d^2y}^2 - \overline{dx}^3\,\overline{d^2y}^2 + 5\overline{dx}^2 dy\,d^2x\,d^2y - 3\overline{dy}^3 d^2x\,d^2y - 4dx\,dy\,\overline{d^2x}^2}{\overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^2}$$

$$d^2y = -\frac{dx\,dy\,d^2x + \overline{dx}^2 d^2y}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$$

$$d^3y = -\frac{dx\,dy\,d^3x + \overline{dx}^2 d^3y}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} +$$

$$\frac{3\overline{dx}^2 dy\,\overline{d^2x}^2 - \overline{dy}^3\,\overline{d^2x}^2 + 5dx\,\overline{dy}^2 d^2x\,d^2y - 3\overline{dx}^3 d^2x\,d^2y - 4\overline{dx}^2 dy\,\overline{d^2y}^2}{\overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^2}$$

Fatte che si saranno le accennate sostituzioni, ne risulterà una formola, in cui nessun elemento sarà costante.

200. Per mezzo degli esposti metodi si risolve con tutta facilità questo problema, in cui cercasi, nel caso, che sia data una formola, nella quale sia stato preso costante un certo elemento, di ritrovarne una equivalente, in cui un'altro elemento sia costante, come sarebbe a cagion d'esempio se data una formola avente costante l'elemento dx, se ne volesse un' altra equivalente, nella quale non più dx, ma dy fosse costante. Per ottener ciò, si riduca la formola giusta il modo esposto a non avere alcun elemento costante, poscia si operi a norma de' numeri 184, 185, 186, 187, 188 relativamente all' elemento, che si vuole costante. Osserviamo una cosa per altro evidentissima per se stessa, ed è, che l' elemento di un'arco di curva (quest'elemento, come ho detto al num. 174, viene rappresentato da $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, o pure da $d.s$ con chiamare l' arco $= s$) risultante dalla supposizione di dx costante non è lo stesso di quello, che nasce dalla supposizione di dy costante, poichè nel primo caso sono eguali tutti gli elementi dell' abscissa, che non lo sono nel secondo, lo che porta necessariamente varietà ne' corrispondenti elementi della curva. Che se il differenziale secondo di un arco di curva nell' ipotesi di dy costante si esprimerà così $D\,ds$, e nell' ipotesi di dx costante si rappresenterà così $\Delta.\,ds$, si troverà sussistere questa equazione $D.\,ds = -\frac{\overline{dx}^2.\ \Delta.\ ds}{\overline{dy}^2}$; poichè la ragione di ds a dx essendo espressa da $1 : X$, si avrà $ds : dx :: 1 : X$, e però $dx = X\,ds$, conseguentemente $\overline{dx}^2 = X^2\,\overline{ds}^2$, ed aggiungendo $\overline{dy}^2$ all' uno, e all' altro membro, si avrà $\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 = \overline{dy}^2 + X^2\,\overline{ds}^2$ che, con sostituire $\overline{ds}^2$ in luogo di $\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2$, diventa $\overline{ds}^2 = \overline{dy}^2 + X^2\,\overline{ds}^2$, o sia $\overline{dy}^2 = \overline{1 - X^2} \times \overline{ds}^2$; onde si ha $dy = ds\sqrt{1 - X^2}$. Si differenzi primieramente l' equazione $dx = X\,ds$ ritenendo costante dx, e ne verrà (A) $0 = dX\,ds + X\,\Delta\,ds$; in secondo luogo si differenzi l' equazione $dy = ds\sqrt{1 - X^2}$ ritenendo costante dy, e fatto ciò si avrà

$$0 = -\frac{X\,dX\,ds}{\sqrt{1-X^2}} + D.\,ds\sqrt{1 - X^2} = (B) - X\,dX\,ds + D.\,ds \times \overline{1 - X^2}.$$

Ora

Ora si sommi quest' equazione (B) coll' equazione (A) moltiplicata in X, e ne risulterà $X^2 \Delta. ds + D.ds \times \overline{1 - X^2} = 0$, da cui si ricava (Q) $D.\, ds = -\frac{X^2 \Delta\, ds}{1 - X^2}$: Ma con dividere l' equazione $\overline{dx}^2 = X^2 \overline{ds}^2$ per l' equazione $\overline{dy}^2 = \overline{1 - X^2} \times \overline{ds}^2$ si ha $\frac{\overline{dx}^2}{\overline{dy}^2} = \frac{X^2}{1 - X^2}$. Dunque se nell' equazione [Q] si sostituirà $\frac{\overline{dx}^2}{\overline{dy}^2}$ in luogo di $\frac{X^2}{1 - X^2}$, si otterrà

$D.\, ds = -\frac{\overline{dx}^2 \Delta\, ds}{\overline{dy}^2}$, dalla quale pur si deduce [P] $\frac{D.\, ds}{\Delta.\, ds} = -\frac{\overline{dx}^2}{\overline{dy}^2}$:

Che se la ragione dell' elemento dy dell' ordinata all' elemento dx dell' abscissa sarà espresso da $1 : X$, si avrà $dy : dx :: 1 : X$, e però $dx = X\, dy$ [H], che elevata al quadrato è $\overline{dx}^2 = X^2 \overline{dy}^2$ (E), dalla quale si ricava $\overline{dy}^2 = \frac{\overline{dx}^2}{X^2}$ (F). Ma chiamando ds l'elemento di un arco di curva, come poco avanti si è fatto, si ha $ds = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, e in conseguenza $\overline{ds}^2 = \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2$ (G); quindi se in questa equazione [G] si sostituirà il valore di $\overline{dx}^2$ preso dall' equazione [E], essa si cambierà nella seguente (M) $\overline{ds}^2 = X^2 \overline{dy}^2 + \overline{dy}^2$; e se vi si sostituirà il valore di $\overline{dy}^2$ preso dall' equazione (F), essa diverrà (N) $\overline{ds}^2 = \overline{dx}^2 + \frac{\overline{dx}^2}{X^2}$. Si differenzi l' equazione (M) ritenendo costante dy, e ne verrà (R) $2\, ds.\, D.\, ds = 2X dX \overline{dy}^2$; di poi si differenzi l' equazione (N) ritenendo costante dx, e si avrà

$2d.\,\Delta\,ds = -\frac{2dX\,\overline{dx}^2}{X^3}$ [S.] Rappresentiamo con D. dx il differenziale di dx nell'ipotesi di dy costante, e con $\Delta.\,dy$ il differenziale di dy nell'ipotesi di dx costante, nel qual modo prendendo il differenziale dell'equazione (H) nell'ipotesi di dx costante, si avrà $o = X\,\Delta.\,dy + dX\,dy$, da cui si ricava $dX = -\frac{X\,\Delta.\,dy}{dy}$, il qual valore sostituito nell'equazione (S), la riduce a (K) $ds\,\Delta.\,ds = \frac{\Delta.\,d.\,y\,\overline{dx}^2}{X^2\,dy}$, che mediante la sostituzione del valore di X^2 preso dall'equazione (H), che è $= \frac{\overline{dx}^2}{\overline{dy}^2}$, diventa $ds\ \Delta.\ ds = dy\ \Delta\ dy$, la quale somministra

[C] $\frac{ds\ \Delta\ ds}{dy} = \Delta.dy$. In oltre differenziando l'equazione (H) nell'ipotesi di dy costante, si ha D. $dx = dX\,dy$, che moltiplicata nella stessa equazione (H), risulta dx D. $dx = X\,dX\,\overline{dy}^2$. Col sostituire questo valore di $X\,dX\,\overline{dy}^2$ nell'equazione (R), essa passa ad essere ds D. $ds = dx$ D. dx, da cui ne viene

(Z) D. $dx = \frac{ds\ \text{D.}\ ds}{dx}$, il qual valore di D. dx si trova espresso ancora dalla seguente equazione D. $dx = -\frac{dx\ \Delta\ dy}{dy}$, poichè dividendo l'equazione (Z) per l'equazione (C), ne viene $\frac{\text{D.}\ dx}{\Delta.\ dy} = \frac{dy\ \text{D.}\ ds}{dx\ \Delta.\ ds}$ (Y); e siccome dall'

equa-

Digitized by Google

equazione (P) si ha $\frac{D.\,ds}{\Delta.\,ds} = -\frac{\overline{dx}^2}{dy^2}$, facendo la sostituzione di questo valore nella precedente equazione (Y), essa trovasi essere $\frac{D.\,dx}{\Delta.\,dy} = -\frac{dx}{dy}$, da cui ne viene $D.\,dx = -\frac{dx\,\Delta\,dy}{dy}$.

201. Abbiamo veduto al num. 114, che le formole, le quali contengono i differenziali superiori d^2x, d^3x ec., d^2y, d^3y ec. hanno una significazione indeterminata, mentre il loro valore varia a misura, che uno, o un'altro differenziale si assume costante: Per lo che quelle formole, che non ostante il contenere i differenziali superiori hanno un valore fisso, e determinato, non possono nel loro valore subir mutazione, allorchè supponendo in esse un elemento costante, si passa poscia alla formola equivalente, in cui niun elemento sia costante. Ed ecco un criterio sicuro per conoscere se una formola contenente i differenziali superiori abbia, o no un valore determinato. Si ponga in essa costante ad arbitrio un qualche differenziale, poscia col modo poc'avanti insegnato si riduca alla formola equivalente, in cui nessun differenziale sia costante, e si osservi se questa formola, che n'è risultata è, o non è la stessa della proposta. Se lo è, la formola proposta ha una significazione fissa; ma all'opposto ha una significazione vaga, se la formola ritrovata è diversa. Vediamone l'esempio nella formola $\frac{x^2 d^2x + xy\,d^2y}{dx\,dy}$. Col supporre costante dx essa diventa $\frac{xy\,d^2y}{dx\,dy}$. Passiamo all'ipotesi di nessuna costante col sostituire $d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx}$ in luogo di d^2y, e da tale sostituzione ne verrà $\frac{xy\,d^2y}{dxdy} - \frac{xy\,d^2x}{dx^2}$, che è una formola totalmente diversa dalla proposta, conseguentemente la proposta non ha un valore fisso, ma incerto, e vago.

Sia proposta in secondo luogo la formola $-\frac{\overline{dy}^2 d^2x + dy\,dx\,d^2y}{\overline{dx}^2}$. Col prendere costante l'elemento dx essa diventa $\frac{dy\,dx\,d^2y}{\overline{dx}^2}$: Si passi all'ipotesi di nessuna costante col sostituire $d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx}$ in vece di d^2y, e poichè ne viene $\frac{dy\,dx\,d^2y - \overline{dy}^2 d^2x}{\overline{dx}^2}$, che è la stessa formola proposta, rendesi perciò manifesto, che la formola proposta ha una determinata significazione.

202. Qualora pertanto sia data un' espressione generale, come $m\,dy\overline{dx}^2 + n\,dy\,d^2y + p\,dx\overline{dy}^2 + q\,dx\,d^2x$, in cui nissun elemento è assunto costante, si potrà determinare la condizione, che le dà un valor fisso. Si ponga costante dy, e la formola diverrà $m\,dy\overline{dx}^2 + p\,dx\overline{dy}^2 + q\,dx\,d^2x$. Si passi in seguito all'ipotesi di nessuna costante col sostituire $d^2x - \frac{dx\,d^2y}{dy}$ in vece di d^2x, e con ciò ne verrà $m\,dy\overline{dx}^2 + p\,dx\overline{dy}^2 + q\,dx\,d^2x - \frac{q\overline{dx}^2 d^2y}{dy}$. Acciò adunque la formola abbia un valore fisso deve essere $n\,dy\,d^2y = -\frac{q\overline{dx}^2 d^2y}{dy}$, o sia $n\overline{dy}^2 = -q\overline{dx}^2$, conseguentemente $n = -\frac{q\overline{dx}^2}{\overline{dy}^2}$, o $q = -\frac{n\overline{dy}^2}{\overline{dx}^2}$.

AR-

Digitized by Google

ARTICOLO IX.

Della maniera di liberare dall' assimetria le quantità differenziali.

203. SE nella quantità differenziale $(Ax^k + Bx^m + \text{ec.})^n\, dx + (G + Hx^p + Kx^q + \text{ec.})^r\, dx + (R + Sx^t + \text{ec.})^s$ ciascuno degli esponenti k, m, n, p, q, r, s, t sarà un numero intero, o pur zero, la quantità proposta sarà razionale, e all' opposto sarà irrazionale, qualora qualcun di loro sia un numero fratto. In caso pertanto, che essa sia irrazionale, si potrà ridurre alla razionalità per mezzo delle sostituzioni, introducendo cioè in luogo di x una nuova variabile z. Per vedere come debbasi operare, supponiamo che, essendo numeri interi gli esponenti n, r, s, qualch' uno degli altri k, m, p, q, t, o pure anche tutti siano numeri fratti. Ciò essendo si prenda il numero intero φ, che sia il minore di tutti fra quelli, de' quali ognuno de' denominatori delle dette frazioni, che suppongo ridotte a minimi termini, può essere parte aliquota, indi si faccia $x = z^{\varphi}$, e ritrovando i valori di dx, e delle potestà di x date per z^{φ}, se ne faccia la sostituzione nella proposta quantità differenziale, e in questo modo ne verrà la cercata quantità differenziale libera dall' assimetria.

204. Si debba per esempio rendere razionale la quantità differenziale

$$dx\left[(Ax^{\frac{\delta}{\varepsilon}} + Bx^m + \text{ec.})^n + (G + Hx^{\frac{\pi}{\gamma}} + Kx^{\frac{\pi}{\omega}} + \text{ec.})^r + (R + Sx^t + \text{ec.})^s\right]$$

Sia φ il minimo numero intero, di cui ciascuno de' denominarori ε, γ, ω è parte aliquota. Si faccia adunque $x = z^{\varphi}$, e si avrà $dx = \varphi z^{\varphi - 1}\, dz$;

$x^{\frac{\delta}{\varepsilon}} = z^{\frac{\delta\varphi}{\varepsilon}}$, $x^m = z^{m\varphi}$; $x^{\frac{\pi}{\gamma}} = z^{\frac{\pi\varphi}{\gamma}}$, $x^{\frac{\pi}{\omega}} = z^{\frac{\pi\varphi}{\omega}}$; $x^t = z^{t\varphi}$. Si faccia la sostituzione di questi valori nella proposta quantità, e ne verrà

$$\varphi z^{\varphi-1}\, dz\left[(Az^{\frac{\delta\varphi}{\epsilon}} + Bz^{m\varphi} + ec.)^n + (G + Hz^{\frac{\pi\varphi}{\gamma}} + Kz^{\frac{\pi\varphi}{\omega}} + ec.)^r + (R + Sz^{t\varphi} + ec.)^r\right]$$

cercata quantità razionale.

205. Parimente se farà data la quantità differenziale

$$x^{\frac{\delta}{\epsilon}-1}\, dx\left[(Ax^k + Bx^m + ec.)^n + (G + Hx^{\frac{\pi}{\omega}} + Kx^q + ec.)^r\right],$$ si prenda

il minimo numero intero φ, che possa essere esattamente misurato dai denominatori ϵ, ω, e si faccia $x = z^{\varphi}$, con che farà $dx = \varphi z^{\varphi-1} dz$;

$$x^{\frac{\delta}{\epsilon}-1} = z^{\frac{\delta\varphi}{\epsilon}-\varphi};\ x^{\frac{\delta}{\epsilon}-1} dx = z^{\frac{\delta\varphi}{\epsilon}-\varphi} \times \varphi z^{\varphi-1} dz = \varphi z^{\frac{\delta\varphi}{\epsilon}-1} dz;\ x^k = z^{k\varphi};$$

$x^m = z^{m\varphi}$; $x^q = z^{q\varphi}$; $x^{\frac{\pi}{\omega}} = z^{\frac{\pi\varphi}{\omega}}$, onde fatte le debite sostituzioni, la quantità data si cambierà nella seguente razionale

$$\varphi z^{\frac{\delta\varphi}{\epsilon}-1}\, dz\left((Az^{k\varphi} + Bz^{m\varphi} + ec.)^n + (G + Hz^{\frac{\pi\varphi}{\omega}} + Kz^{q\varphi} + ec.)^r\right).$$

206. Che se farà $x^{\frac{\delta}{\epsilon}-1} dx\left((Ax^{\delta} + Bx^{t\delta} + ec.)^n + (G + Hx^{\delta} + Kx^{\pi\delta} + ec.)^r\right)$,

basterà fare $x = z^{\frac{\epsilon}{\delta}}$, lo che darà $dx = \frac{\epsilon}{\delta} z^{\frac{\epsilon}{\delta}-1} dz$; $x^{\frac{\delta}{\epsilon}-1} = z^{1-\frac{\epsilon}{\delta}}$, onde

x

$$x^{\frac{\delta}{\epsilon}-1}\, dx = z^{1-\frac{\epsilon}{\delta}} \times \frac{\epsilon}{\delta}\, z^{\frac{\epsilon}{\delta}-1}\, dz = \frac{\epsilon}{\delta}\, dz;\; x^{\delta} = z^{\epsilon};\; x^{\theta\delta} = z^{\theta\epsilon};\; x^{\tau\delta} = z^{\tau\epsilon}:$$

Per lo che fatte queste sostituzioni, la proposta quantità si cambierà nella seguente razionale

$$\frac{\epsilon}{\delta}\, dz \left((Az^{\epsilon} + B\, z^{\theta\epsilon} + ec.)^{n} + (G + Hz^{\epsilon} + Kz^{\tau\epsilon} + ec.)^{r} \right).$$

207. O pure essendo $x^{\frac{\omega\delta}{\epsilon}-1} dx\left((Ax^{\delta} + Bx^{\theta\delta} + ec.)^{n} + (G + Hx^{\delta} + Kx^{\tau\delta} + ec.)^{r}\right)$,

col fare $x = z^{\frac{\epsilon}{\delta}}$, sarà $dx = \frac{\epsilon}{\delta}\, z^{\frac{\epsilon}{\delta}-1} dz;\; x^{\frac{\omega\delta}{\epsilon}-1} = z^{\omega-\frac{\epsilon}{\delta}};\; x^{\frac{\omega\delta}{\epsilon}-1} dx =$

$$z^{\omega-\frac{\epsilon}{\delta}} \times \frac{\epsilon}{\delta}\, z^{\frac{\epsilon}{\delta}-1}\, dz = \frac{\epsilon}{\delta}\, z^{\omega-1} dz;\; x^{\delta} = z^{\epsilon};\; x^{\theta\delta} = z^{\theta\epsilon};\; x^{\tau\delta} = z^{\tau\epsilon};$$

e però la ridotta quantità differenziale sarà

$$\frac{\epsilon}{\delta}\, z^{\omega-1}\, dz \left((Az^{\epsilon} + Bz^{\theta\epsilon} + ec.)^{n} + (G + Hz^{\epsilon} + Kz^{\tau\epsilon} + ec.)^{r} \right).$$

208. Qualora la quantità differenziale irrazionale fosse la seguente

$$x^{\pi-1}dx\left(\left(Ax^m+Bx^k+C\left(\frac{ax+b}{ex+g}\right)^{\frac{\pi}{\omega}}+\text{ec}\right)^r+\left(G+Hx^p+K\left(\frac{ax+b}{ex+g}\right)^{\frac{\delta}{\gamma}}+\text{ec}\right)^r\right),$$

si prenda il minimo numero intero φ, di cui i denominatori ω, γ siano parti aliquote, e si ponga $\frac{ax+b}{ex+g}=z^\varphi$, dalla quale equazione si ricavi il valore di x, che è $x=\frac{gz^\varphi-b}{a-ez^\varphi}$, onde si ha $x^{\pi-1}=\left(\frac{gz^\varphi-b}{a-ez^\varphi}\right)^{\pi-1}$; $dx=$

$$\frac{\varphi g z^{\varphi-1}dz \times \overline{a-ez^\varphi}+\varphi e z^{\varphi-1}dz \times \overline{gz^\varphi-b}}{\overline{a-ez^\varphi}^2}=$$

$$\varphi\left(\frac{ag-be}{\overline{a-ez^\varphi}^2}\right)z^{\varphi-1}dz;\ x^m=\left(\frac{gz^\varphi-b}{a-ez^\varphi}\right)^m;\ x^k=\left(\frac{gz^\varphi-b}{a-ez^\varphi}\right)^k;$$

$$\left\{\frac{ax+b}{ex+g}\right\}^{\frac{\pi}{\omega}}=z^{\frac{\pi\varphi}{\omega}};\ x^p=\left\{\frac{gz^\varphi-b}{a-ez^\varphi}\right\}^p;\ \left\{\frac{ax+b}{ex+g}\right\}^{\frac{\delta}{\gamma}}=z^{\frac{\delta\varphi}{\gamma}}.$$ Che però

fatte le debite sostituzioni, la cercata razionale quantità differenziale sarà

$$\left\{\frac{gz^{\varphi}-b}{a-ez^{\varphi}}\right\}^{\pi-1} \times \left\{\frac{ag-be}{\overline{a-ez^{\varphi}}^{2}}\right\} z^{\varphi-1}\,dz \left\{ \left(A\left\{\frac{gz^{\varphi}-b}{a-ez^{\varphi}}\right\}^{m} + \right.\right.$$

$$B\left\{\frac{gz^{\varphi}-b}{a-ez^{\varphi}}\right\}^{k} + C\,z^{\frac{\tau\varphi}{\omega}} + \text{ec.}\Big)^{n} +$$

$$\left.\left(G + H\left\{\frac{gz^{\varphi}-b}{a-ez^{\varphi}}\right\}^{p} + K z^{\frac{\pi\varphi}{\gamma}} + \text{ec.}\right)^{r} \right\}.$$

209. A tenore della maniera praticata nel precedente num. 208. operando, farà facile il ridurre la feguente quantità differenziale

$$x^{\delta}\,dx \left((A+Bx^{k} + C\times\overline{a+bx}^{\frac{\tau}{\omega}} + \text{ec.})^{n} + (G+H\times\overline{a+bx}^{\frac{\pi}{\gamma}} + \text{ec.})^{r} \right)$$

ad effere razionale. Si prenda il minimo numero intero φ che venga efattamente mifurato dai denominatori ε, ω, γ, e fi faccia $a+bx=z^{\varphi}$, da cui fi ricava $x=\frac{z^{\varphi}-a}{b}$: quindi $dx=\frac{\varphi}{b}z^{\varphi-1}dz$; $x^{\delta}=$

$$\left\{\frac{z^{\varphi}-a}{b}\right\}^{\delta};\ x^{k}=\left\{\frac{z^{\varphi}-a}{b}\right\}^{k};\ \overline{a+bx}^{\frac{\tau}{\omega}}=z^{\frac{\tau\varphi}{\omega}};\ \overline{a+bx}^{\frac{\pi}{\gamma}}=z^{\frac{\pi\varphi}{\gamma}},$$

confeguentemente fatte quefte foftituzioni fi ottiene la cercata quantità razionale, che è

$$\frac{\varphi}{b}\left(\frac{z^{\varphi}-a}{b}\right)^{\delta}\cdot z^{\varphi-1}dz\left\{\left(A+B\left(\frac{z^{\varphi}-a}{b}\right)^{k}+C\,z^{\frac{\pi\varphi}{\mu}}+\text{ec.}\right)^{n}+\right.$$

$$\left.\left(G+H z^{\frac{\pi\varphi}{\gamma}}+\text{ec.}\right)^{r}\right\}.$$

210. Passiamo adesso a percorrere i casi, ne' quali qualcuno degli esponenti n, r, s, ovvero tutti sono numeri fratti. E primieramente debbasi rendere razionale questa quantità differenziale

$$x^{\delta\varepsilon-1}dx\left\{\left(A+B\,x^{\varepsilon}+C\,x^{\pi\varepsilon}+\text{ec.}\right)^{n}+\left(G+H\,x^{\varepsilon}.\right)^{\frac{\mu}{\gamma}}\right\}.$$

Si faccia $G+Hx^{\varepsilon}=z^{\gamma}$, da cui si ricava $x^{\varepsilon}=\frac{z^{\gamma}-G}{H}$, ed $x=\left(\frac{z^{\gamma}-G}{H}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$

$$x^{\delta\varepsilon-1}=\left(\frac{z^{\gamma}-G}{H}\right)^{\delta-\frac{1}{\varepsilon}};\ dx=\frac{\frac{\gamma}{\varepsilon}\,z^{\gamma-1}dz.\ \chi\overline{z^{\gamma}-G}^{\frac{1}{\varepsilon}-1}}{H^{\frac{1}{\varepsilon}}};$$

$\left(G+Hx^{\varepsilon}\right)^{\frac{\mu}{\gamma}}=z^{\mu}$ ec. Si faccia pertanto la sostituzione di questi valori, e la cercata quantità razionale sarà (In seguito per più comodo mi servirò del punto in luogo del segno della moltiplicazione)

$\frac{\gamma}{\varepsilon}$

$$\frac{\gamma}{\nu}\frac{(z^{\gamma}-G)^{\delta-1}.\,z^{\gamma-1}\,dz}{H^{\delta}}\left\{(A+B\left(\frac{z^{\gamma}-G}{H}\right)+C\left(\frac{z^{\gamma}-G}{H}\right)^{\pi}+z^{\omega}\right\}.$$

211. Quindi la ſteſſa operazione ſu la quantità $x^{\delta\nu-1}dx\,(G+Hx^{\nu})^{\pm\frac{\omega}{\gamma}}$ la riduce alla ſeguente razionale

$$\frac{\gamma}{\nu}\,\frac{(z^{\gamma}-G)^{\delta-1}}{H^{\delta}}.\,z^{\pm\omega+\gamma-1}dz.$$

212. Se la quantità data foſſe $x^{m}dx.\,(G+Hx)^{\pm\frac{\omega}{\gamma}}$, collo ſteſſo metodo ſi troverebbe $\gamma\,\frac{(z^{\gamma}-G)^{m}.\,z^{\pm\omega+\gamma-1}dz}{H^{m+1}}$.

213. La quantità differenziale da renderſi razionale ſia

$x^{\delta m-1}\,dx\left(\frac{A+Bx^{m}}{Q+Rx^{m}}\right)^{\frac{\pi}{\omega}}$. Si faccia $x^{m}=z$; onde ſarà

$x=z^{\frac{1}{m}}$; $dx=\frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1}dz$; $x^{\delta m-1}=z^{\delta-\frac{1}{m}}$, cho però la quantità propoſta mediante la ſoſtituzione di queſti valori diverrà [T]

$\frac{1}{m} z^{\delta-1} dz \left(\frac{A+Bz}{Q+Rz}\right)^{\frac{\tau}{\omega}}$. Si faccia ora $\frac{A+Bz}{Q+Rz} = u^{\omega}$, e da questa equazione si ricavi il valore di z, che è $z = \frac{Qu^{\omega} - A}{B - Ru^{\omega}}$, quindi $z^{\delta-1}$

$$= \left\{\frac{Qu^{\omega} - A}{B - Ru^{\omega}}\right\}^{\delta-1}; \quad \left\{\frac{A+Bz}{Q+Rz}\right\}^{\frac{\tau}{\omega}} = u^{\tau}; \quad dz =$$

$\frac{\omega Q u^{\omega-1} du \times \overline{B - Ru^{\omega}} + \omega R u^{\omega-1} du \times \overline{Qu^{\omega} - A}}{\overline{B - Ru^{\omega}}^{2}}$; conseguentemente la

quantità (T) con sostituire questi valori si cambia nella seguente

$$\frac{1}{m} \left\{\frac{Qu^{\omega} - A}{B - Ru^{\omega}}\right\}^{\delta-1} \times$$

$$u^{\tau} \left\{\frac{\omega Q u^{\omega-1} du \times \overline{B - Ru^{\omega}} + \omega R u^{\omega-1} du \times \overline{Qu^{\omega} - A}}{\overline{B + Ru^{\omega}}^{2}}\right\} =$$

$$\frac{1}{m} u^{\tau+\omega-1} du \left\{\frac{Qu^{\omega} - A}{B - Ru^{\omega}}\right\}^{\delta-1} \times$$

$$\left\{\frac{\omega Q \times \overline{B - Ru^{\omega}} + \omega R \times \overline{Qu^{\omega} - A}}{\overline{B + Ru^{\omega}}^{2}}\right\}.$$

214. Qualora la quantità differenziale da ridurre a razionale sia

$x^{\delta m-1}\, dx \left(\overline{A+Bx}^{\,\omega-1} \times \overline{C+Dx^m} \right)^{\frac{\pi}{\omega}}$, si faccia primieramente $x^m = z$,

lo che la ridurrà ad [X] $\frac{1}{m}\, z^{\delta-1} dz \left(\overline{A+Bz}^{\,\omega-1} \times \overline{C+Dz} \right)^{\frac{\pi}{\omega}}$, poscia si ponga

$\left\{ \overline{A+Bz}^{\,\omega-1} \times \overline{C+Dz} \right\}^{\frac{1}{\omega}} = \overline{A+Bz} \times u$, ed elevando l'uno, e l'altro

membro di questa equazione alla potestà indicata da ω; ne viene

$\overline{A+Bz}^{\,\omega-1} \times \overline{C+Dz} = (A+Bz)^\omega \cdot u^\omega$, cioè $C+Dz = \overline{A+Bz} \times u^\omega$

(mediante il fare la divisione per $\overline{A+Bz}^{\,\omega-1}$), da cui si ricava il valore di z,

che è $z = \frac{Au^\omega - C}{D - Bu^\omega}$; quindi $z^{\delta-1} = \left\{ \frac{Au^\omega - C}{D - Bu^\omega} \right\}^{\delta-1}$; $dz =$

$$\frac{\omega Au^{\omega-1}du \times \overline{D - Bu^\omega} + \omega Bu^{\omega-1}du \times \overline{Au^\omega - C}}{\overline{D - Bu^\omega}^{\,2}} =$$

$\frac{\omega u^{\omega-1}du\,(AD - BC)}{\overline{D - Bu^\omega}^{\,2}}$. Ed essendo $z = \frac{Au^\omega - C}{D - Bu^\omega}$, sarà $A + Bz =$

$A + B \left\{ \frac{Au^\omega - C}{D - Bu^\omega} \right\} = \frac{AD - BC}{D - Bu^\omega}$; $\left\{ \overline{A+Bz}^{\,\omega-1} \times \overline{C+Dz} \right\}^{\frac{\pi}{\omega}} =$

AD

$\left\{\frac{AD - BC}{D - Bu^{\omega}}\right\}^{\tau} \cdot u^{\tau}$. Sostituendosi pertanto questi valori nella quantità (X), si avrà

$$\frac{1}{m}\left\{\frac{Au^{\omega} - C}{D - Bu^{\omega}}\right\}^{\delta - 1} \cdot \left\{\omega\, u^{\omega - 1} du \times \frac{\overline{AD - BC}}{\overline{D - Bu^{\omega}}^{2}}\right\} \cdot \left\{\frac{AD - BC}{D - Bu^{\omega}}\right\}^{\tau} \cdot u^{\tau} =$$

$$\frac{\omega\, u^{\omega + \tau - 1} du \left(Au^{\omega} - C\right)^{\delta - 1} \left(AD - BC\right)^{\tau + 1}}{m\left(D - Bu^{\omega}\right)^{\delta + \tau + 1}}$$ cercata quantità razionale.

215. Se la quantità fosse stata $x^{\delta m - 1} dx \left\{\overline{A + Bx^{m}} \times \overline{C + Dx^{m}}\right\}^{\frac{\tau}{2}}$, ($\tau$ è un numero impari), con operare nello stesso modo si sarebbe avuto

$$\frac{2 u^{\tau + 1} du \left(Au^{2} - C\right)^{\delta - 1} \cdot \left(AD - BC\right)^{\tau + 1}}{m\left(D - Bu^{2}\right)^{\delta + \tau + 1}}$$

216. Rispetto alla quantità $x^{\delta m - 1} dx \left\{\overline{A + Bx^{m}}^{\omega - 1} \times \overline{C + Dx^{m}}\right\}^{-\frac{\tau}{\omega}}$, si riduca primieramente ad (S)

$\frac{1}{m} z^{\delta - 1} dz \left\{\overline{A + Bz}^{\omega - 1} \times \overline{C + Dz}\right\}^{-\frac{\tau}{\omega}}$, col porre $x^{m} = z$, poscia si fac-

ſi faccia $\left\{\overline{A + Bz}^{\,\omega-1} \times \overline{C + Dz}\right\}^{-\frac{1}{\omega}} = u\,(A + Bz)^{-1}$, ed alzando

l'uno, e l'altro membro alla poteſtà ω, ne verrà

$$\left(\overline{A + Bz}^{\,\omega-1} \times \overline{C + Dz}\right)^{-1} = u^{\omega}\,(A + Bz)^{-\omega}\text{, o ſia } \frac{\overline{A + Bz}^{\,\omega}}{\overline{A + Bz}^{\,\omega-1}} =$$

$u^{\omega} \times \overline{C + Dz}$, vale a dire $A + Bz = u^{\omega} \times \overline{C + Dz}$, da cui ſi ricava il

valore di z, che è $z = \dfrac{C^{\omega} - A}{B - Du^{\omega}}$, onde $dz =$

$$\frac{\omega\,Cu^{\omega-1}\,du \times \overline{B - Du^{\omega}} + \omega\,Du^{\omega-1}\,du \times \overline{Cu^{\omega} - A}}{\overline{B - Du^{\omega}}^{\,2}} = \frac{\omega\,u^{\omega-1}\,du \times \overline{CB - AD}}{\overline{B - Du^{\omega}}^{\,2}}\,;$$

$$z^{\delta-1} = \frac{\overline{Cu^{\omega} - A}^{\,\delta-1}}{\overline{B - Du^{\omega}}^{\,\delta-1}}\,;\ A + Bz = A + \frac{BCu^{\omega} - AB}{B - Du^{\omega}} = \frac{BCu^{\omega} - ADu^{\omega}}{B - Du^{\omega}}\,;$$

$$\left\{\overline{A + Bz}^{\,\omega-1} \times \overline{C + Dz}\right\}^{-\frac{\tau}{\omega}} = u^{\tau}\left\{\frac{BCu^{\omega} - ADu^{\omega}}{B - Du^{\omega}}\right\}^{-\tau}.$$

La quantità [S] adunque mediante la ſoſtituzione di queſti valori ſi troverà eſſere

$$\frac{1}{m}\times\frac{\overline{Cu^{\omega}-A}^{\,\delta-1}}{\overline{B-Du^{\omega}}^{\,\delta-1}}\times\frac{\omega u^{\omega-1}du\times\overline{BC-AD}}{\overline{B-Du^{\omega}}^{\,2}}\times u^{\tau}\left\{\frac{BCu^{\omega}-ADu^{\omega}}{B-Du^{\omega}}\right\}^{-\tau}=$$

$$\frac{\omega u^{\tau+\omega-1}du\times\overline{Cu^{\omega}-A}^{\,\delta-1}\times\overline{B-Du^{\omega}}^{\,\tau}\times\overline{BC-AD}}{m\times\overline{B-Du^{\omega}}^{\,\delta+1}\times u^{\omega\tau}\,(BC-AD)^{\tau}}=$$

$$\frac{\omega u^{-\omega\tau+\tau+\omega-1}du\times\overline{Cu^{\omega}-A}^{\,\delta-1}}{m\times\overline{B-Du^{\omega}}^{\,\delta-\tau+1}\times\overline{BC-AD}^{\,\tau-1}}$$ cercata quantità razionale.

217. Essendo data la quantità $x^{\delta m-1}dx\ (Ax^{m}+Bx^{2m})^{\frac{\omega}{2}}$, si faccia primieramente $x^{m}=z$, lo che ridurrà la proposta quantità alla seguente (Z)

$\frac{1}{m}\ z^{\delta-1}\ dz\ (Az+Bz^{2})^{\frac{\omega}{2}}$. Ora si ponga $\overline{Az+Bz^{2}}^{\,\frac{1}{2}}=uz$, ed elevando al quadrato, ne viene $Az+Bz^{2}=u^{2}z^{2}$, o sia $A+Bz=u^{2}z$, da cui si ricava il valore di z, che è $z=\frac{A}{u^{2}-B}$; che però si ha

$$z^{\delta-1}=\left\{\frac{A}{u^{2}-B}\right\}^{\delta-1};\ dz=-\frac{2\,Audu}{\overline{u^{2}-B}^{\,2}};\ \overline{Az+Bz^{2}}^{\,\frac{1}{2}}=uz=$$

$\frac{Au}{u^{2}-B}$, conseguentemente $(Az+Bz^{2})^{\frac{\omega}{2}}=\left\{\frac{Au}{u^{2}-B}\right\}^{\omega}$. Se pertanto nella quantità (Z) si sostituiranno questi valori, si avrà

$\frac{1}{m}$

$$\frac{1}{m}\left\{\frac{A}{u^2 - B}\right\}^{\delta-1} \times - \frac{2\,A u du}{\overline{u^2 - B}^2} \cdot \left\{\frac{A u}{u^2 - B}\right\}^{\omega} =$$

$$-\frac{2\,A^{\delta+\omega}\,u^{\omega+1}\,du}{m \times \overline{u^2 - B}^{\delta+\omega+1}}.$$

218. Se la quantità fosse stata $x^{\delta m-1} dx\,(Ax^m + Bx^{2m})^{-\frac{\omega}{2}}$, dopo averla ridotta ad $\frac{1}{m} z^{\delta-1} dz\,(Az + Bz^2)^{-\frac{\omega}{2}}$ mediante il porre $x^m = z$, si avrebbe dovuto fare $(Az + Bz^2)^{-\frac{1}{2}} = uz^{-1}$, e poscia continuare ad operare nella stessa maniera praticata nel precedente num. 217.

219. Si intende, che ne' due precedenti numeri la lettera ω deve rappresentare un numero impari, altrimenti se rappresentasse un numero pari, $\frac{\omega}{2}$ sarebbe un numero intero, e la quantità sarebbe razionale.

220. La maniera praticata al num. 214. servirà del pari per rendere razionale questa quantità differenziale $x^{\delta m-1} dx\,(A + Bx^m + Cx^{2m})^{\frac{\omega}{2}}$, (la lettera ω esprime un numero impari, acciò la quantità sia irrazionale). Si faccia primieramente $x^m = z$, e con ciò tale quantità si ridurrà alla seguente

$\frac{1}{m} z^{\delta-1} dz\,(A + Bz + Cz^2)^{\frac{\omega}{2}}$; e perchè ω è un numero impari, poniamo

$\omega = 2\pi + 1$, onde sarà $\frac{\omega}{2} = \pi + \frac{1}{2}$, ed $\overline{A + Bz + Cz^2}^{\frac{\omega}{2}} =$

$\overline{A+Bz+Cz^2}^{r} \times \overline{A+Bz+Cz^2}^{\frac{1}{2}}$. Tutto adunque si riduce a rendere razionale la quantità $\overline{A+Bz+Cz^2}^{\frac{1}{2}}$, lo che si ottiene mediante il num. 214. A tale effetto si risolva ne' suoi due fattori la quantità $A+Bz+Cz^2$ col metodo delle quadratiche affette, facendo primieramente $\frac{A}{C}+\frac{Bz}{C}+z^2$, la quale quantità si risolve in $z+\frac{B+\sqrt{-4AC+B^2}}{2C}$, e $z+\frac{B-\sqrt{-4AC+B^2}}{2C}$, dove deve essere $B^2 > 4AC$, acciò queste quantità siano reali. Si faccia pertanto $+\frac{B+\sqrt{-4AC+B^2}}{2C}=P$; $+\frac{B-\sqrt{-4AC+B^2}}{2C}=+Q$, e con ciò sarà

$$\left\{\frac{A}{C}+\frac{Bz}{C}+z^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\overline{z+P}\times\overline{z+Q}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ora si ponga $\left(\overline{z+P}\times\overline{z+Q}\right)^{\frac{1}{2}}=u\times\overline{z+Q}$, ed elevando l'un, e l'altro membro al quadrato si avrà $\overline{z+P}\times\overline{z+Q}=u^2\times\overline{z+Q}^2$, che con fare la divisione per $z+Q$ diventa $z+P=u^2\times\overline{z+Q}$, da cui si ricava il valore di z, che è $z=-\frac{Qu^2+P}{u^2-1}$. Che però trovasi $z^{\delta-1}=-\frac{\overline{Qu^2+P}^{\delta-1}}{\overline{u^2-1}^{\delta-1}}$; $dz=$

$$-\frac{2uQ\,du\sqrt{u^2-1}-2u\,du\sqrt{-Qu^2+P}}{\overline{u^2-1}^2}=-\frac{2u\,du\sqrt{P-Q}}{\overline{u^2-1}^2};$$

$z+Q=-\frac{Qu^2+P}{u^2-1}+Q=\frac{P-Q}{u^2-1}$, e però $u\sqrt{z+Q}$

$=\frac{u\sqrt{P-Q}}{u^2-1}$, che è stato fatto $=\left(\overline{z+P}\times\overline{z+Q}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left\{\frac{A}{C}+\frac{Bz}{C}+z^2\right\}^{\frac{1}{2}}$; ma $(A+Bz+Cz^2)^{\frac{1}{2}}$

$=C^{\frac{1}{2}}.\left\{\frac{A}{C}+\frac{Bz}{C}+z^2\right\}^{\frac{1}{2}}$, dunque $(A+Bz+Cz^2)^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{C^{\frac{1}{2}}\times u\sqrt{P-Q}}{u^2-1}$, ed inalzando al quadrato si ha

$A+Bz+Cz^2=\frac{C\times u^2\overline{\sqrt{P-Q}}^2}{\overline{u^2-1}^2}$, onde finalmente $(A+Bz+Cz^2)^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{C^{\frac{3}{2}}\times u^3\overline{\sqrt{P-Q}}^3}{\overline{u^2-1}^3}$. Si faccia adunque la sostituzione di questi ritrovati va-

lori nella quantità $\frac{1}{m} z^{\delta-1} dz\,(A+Bz+Cz^2)^{\frac{\omega}{2}}$, e si avrà

$$\frac{1}{m}\times -\frac{\overline{Qu^2+P}^{\,\delta-1}}{\overline{u^2-1}^{\,\delta-1}} \times -\frac{2u\,du \times \overline{P-Q}}{\overline{u^2-1}^{\,2}} \times \frac{C^{\frac{\omega}{2}} \times u^{\omega} \times \overline{P-Q}^{\,\omega}}{\overline{u^2-1}^{\,\omega}} =$$

$$-\frac{2u^{\omega+1}\,du\,.\,C^{\frac{\omega}{2}} \times -\overline{Qu^2+P}^{\,\delta-1} \times \overline{P-Q}^{\,\omega+1}}{m \times \overline{u^2-1}^{\,\delta+\omega+1}}$$ cercata quantità razionale.

221. Istessamente si oprerebbe, se la quantità fosse

$x^{\delta m-1} dx\,(A+Bx^m+Cx^{2m})^{-\frac{\omega}{2}}$ se non che si dovrebbe porre

$$\left\{\frac{A}{C}+\frac{Bz}{C}+z^2\right\}^{-\frac{1}{2}} = (z+P \times z+Q)^{-\frac{1}{2}},$$ e

$$[z+P \times z+Q]^{-\frac{1}{2}} = u \times \overline{z+Q}^{\,-1},$$ dalla quale equazione si ricava

$z = \frac{Q-Pu^2}{u^2-1}$. In seguito si continuino le operazioni nella maniera praticata al precedente num. 220.

222.

222. La quantità differenziale da rendere razionale sia

$x^{\delta}\, dx \left\{ \overline{A+Bx}^{\frac{\tau}{2}} + \overline{C+Dx}^{\frac{\omega}{2}} \right\}$, in cui i numeri espressi da τ, ω sono

impari. Si faccia $\overline{A+Bx}^{\frac{1}{2}} = z$, onde inalzando l'uno, e l'altro membro al quadrato, si ha $A+Bx = z^2$, da cui si ricava il valore di x, che è

$x = \frac{z^2-A}{B}$; che però $C+Dx$ mediante la sostituzione di questo valore di x

diventa $C + \frac{D \times \overline{z^2-A}}{B}$. Si ha pertanto $x^{\delta} = \left\{ \frac{z^2-A}{B} \right\}^{\delta}$;

$dx = \frac{2z\,dz}{B}$; $\overline{A+Bx}^{\frac{\tau}{2}} = z^{\tau}$; $\overline{C+Dx}^{\frac{\omega}{2}} = \left\{ C + \frac{D \times \overline{z^2-A}}{B} \right\}^{\frac{\omega}{2}}$.

Colla sostituzione di questi valori la quantità data si cambierà in [V]

$\left\{ \frac{z^2-A}{B} \right\}^{\delta} \cdot \frac{2z\,dz}{B} \cdot \times \overline{z^{\tau} + \left\{ C + \frac{D \times \overline{z^2-A}}{B} \right\}^{\frac{\omega}{2}}}$. Ora rimane da

ridurre ad essere razionale la quantità $\left\{ C + \frac{D \times \overline{z^2-A}}{B} \right\}^{\frac{\omega}{2}}$, che con porre

C—

$C - \frac{AD}{B} = P$, $\frac{D}{B} = Q$ riduco a $\overline{P + Qz^2}^{\frac{n}{2}}$. Per ottenerlo si faccia

$\overline{P + Qz^2}^{\frac{1}{2}} = Q^{\frac{1}{2}} z + u$: Si inalzi al quadrato l'uno, e l'altro membro di questa equazione, e ne verrà $P + Qz^2 = Qz^2 + 2Q^{\frac{1}{2}} zu + u^2$, da cui si prenda il valore di z, che è $z = \frac{P - u^2}{2Q^{\frac{1}{2}}u}$; quindi $z^2 = \left\{\frac{P - u^2}{2Q^{\frac{1}{2}}u}\right\}^2$; $dz =$

$$- \frac{2u\,du \times 2Q^{\frac{1}{2}}u - 2Q^{\frac{1}{2}}du \times \overline{P - u^2}}{4Qu^2}; \; z^r = \left\{\frac{P - u^2}{2Q^{\frac{1}{2}}u}\right\}^r;$$

$$\left\{C + \frac{D \times \overline{z^2 - A}}{B}\right\}^{\frac{n}{2}} = \left\{\frac{P - u^2}{2u} + u\right\}^n = \left\{\frac{P + u^2}{2u}\right\}^n.$$ La sostituzione adunque di questi valori riduce la quantità [V] alla seguente razionale

[P—

Digitized by Google

$$\left\{\frac{\frac{\overline{P-u^2}^{\,2}}{4Qu^2}-A}{B}\right\}^{\delta}\cdot\frac{-2udu\times\frac{2Q^{\frac{1}{2}}u-2Q^{\frac{1}{2}}du\times\overline{P-u^2}}{4Qu^2}\times\frac{\overline{P-u^2}}{Q^{\frac{1}{2}}u}}{B}\times$$

$$\left\{\left\{\frac{P-u^2}{2Q^{\frac{1}{2}}u}\right\}^{\pi}+\left\{\frac{P+u^2}{2u}\right\}^{\omega}\right\}=$$

$$\left\{\frac{\overline{P-u^2}^{\,2}-4AQu^2}{4BQu^2}\right\}^{\delta}\times\frac{u^2du-P^2du}{2BQu^3}\cdot$$

$$\left\{\left\{\frac{P-u^2}{2Q^{\frac{1}{2}}u}\right\}^{\pi}+\left\{\frac{P-u^2}{2u}\right\}^{\omega}\right\}\times$$

223. Nella quantità $\left\{C+\frac{D\times\overline{z^2-A}}{B}\right\}^{\frac{\varpi}{2}}$ essendo $C>\frac{A}{B}$, e però

$C-\frac{A}{B}=P$ quantità positiva, per ridurre tale quantità ad essere razionale, si

può fare $\overline{P+Qz^2}^{\frac{1}{2}}=P^{\frac{1}{2}}+uz$, ed elevando al quadrato si ha $P+Qz^2=$

$P+$

$P + 2P^{\frac{1}{2}}uz + u^2z^2$, da cui si prenda il valore di z, che è $z = \frac{2P^{\frac{1}{2}}u}{Q-u^2}$, indi si continuino le operazioni al solito.

224. L' operazione non porterà maggiore difficoltà qualora la quantità sia

$$x^{\delta}dx \left\{ \overline{A+Bx}^{-\frac{\pi}{2}} \times \overline{C+Dx}^{-\frac{\omega}{2}}. \right\}$$

225. Sia data la quantità differenziale

$$x^{\delta}dx. \sqrt[\pi]{A+B\sqrt[\omega]{C+D\sqrt[\pi]{\frac{E+Fx^{\frac{1}{\varphi}}}{G+Hx^{\frac{1}{\varphi}}}}}}$$ da ridursi a razionale. Si faccia

$$\sqrt[\pi]{A+B\sqrt[\omega]{C+D\sqrt[\pi]{\frac{E+Fx^{\frac{1}{\varphi}}}{G+Hx^{\frac{1}{\varphi}}}}}} = z,$$ ed elevando alla potestà π, si avrà $$A+B\sqrt[\omega]{C+D\sqrt[\pi]{\frac{E+Fx^{\frac{1}{\varphi}}}{G+Hx^{\frac{1}{\varphi}}}}} = z^{\pi},$$ e però

$$\sqrt[\omega]{C + D\sqrt[\tau]{\frac{E + Fx^{\frac{1}{\varphi}}}{G + Hx^{\frac{1}{\varphi}}}}} = \frac{z^{\tau} - A}{B}.$$ Si inalzi alla potestà ω l'uno, e l'altro membro di questa equazione, e ne verrà

$$C + D\sqrt[\tau]{\frac{E + Fx^{\frac{1}{\varphi}}}{G + Hx^{\frac{1}{\varphi}}}} = \left\{\frac{z^{\tau} - A}{B}\right\}^{\omega},$$ e in conseguenza

$$\sqrt[\tau]{\frac{E + Fx^{\frac{1}{\varphi}}}{G + Hx^{\frac{1}{\varphi}}}} = \frac{\left\{\frac{z^{\tau} - A}{B}\right\}^{\omega} - C}{D}.$$

Si inalzi l'uno, e l'altro membro alla potestà τ, e ne risulterà

$$\frac{E + Fx^{\frac{1}{\varphi}}}{G + Hx^{\frac{1}{\omega}}} = \left\{\frac{\left\{\frac{z^{\tau} - A}{B}\right\}^{\omega} - C}{D}\right\}^{\tau},$$

dalla quale equazione ſi ricava il valore di x, che è

$$x = \frac{\left\{ E - G \left\{ \frac{\left\{ \frac{z^{\pi} - A}{B} \right\}^{\omega} - C}{D} \right\}^{\tau} \right\}^{\varphi}}{\left\{ H \left\{ \frac{\left\{ \frac{z^{\pi} - A}{B} \right\}^{\omega} - C}{D} \right\}^{\tau} - F \right\}^{\varphi}}$$

Si prenda il valore di x^{δ}, e di dx, e ſi ſoſtituiſcano queſti valori nella quantità data, che la ridurranno ad eſſere razionale.

Debbaſi per ultimo render razionale la quantità differenziale

$$x^{\delta - 1} dx . \left\{ (A + Bx + Cx^2)^{\omega} \times \sqrt[\pi]{\frac{D + Ex}{G + Hx}} \right\}$$. Si faccia

V

Digitized by Google

$\sqrt[\varpi]{\dfrac{D + Ex}{G + Hx}} = z$, ed elevando al quadrato si avrà $\dfrac{D + Ex}{G + Hx} = z^{\varpi}$, da cui si ricava il valore di x, che è $x = \dfrac{D - Gz^{\varpi}}{Hz^{\varpi} - E}$. Sarà pertanto

$$x^{\delta - 1} = \left\{ \frac{D - Gz^{\varpi}}{Hz^{\varpi} - E} \right\}^{\delta - 1} ; \; x^{2} = \left\{ \frac{D - Gz^{\varpi}}{Hz^{\varpi} - E} \right\}^{2} \times ;$$

$$dx = \frac{-\varpi G z^{\varpi - 1} dz \times \overline{Hz^{\varpi} - E} - \varpi H z^{\varpi - 1} dz \times \overline{D - Gz^{\varpi}}}{\overline{Hz^{\varpi} - E}^{\,2}} =$$

$\dfrac{\varpi z^{\varpi - 1} dz \times \overline{GE - HD}}{\overline{Hz^{\varpi} - E}^{\,2}}$: Che però col fare la sostituzione di questi valori la proposta quantità diventa

$$\left\{ \frac{D - Gz^{\varpi}}{Hz^{\varpi} - E} \right\}^{\delta - 1} \times \frac{\varpi z^{\varpi} dz \times \overline{GE - DH}}{\overline{Hz^{\varpi} - E}^{\,2}} \times$$

$$\left\{ A + B \times \frac{D - Gz^{\varpi}}{Hz^{\varpi} - E} + C \left(\frac{D - Gz^{\varpi}}{Hz^{\varpi} - E} \right)^{2} \right\}^{b}$$, che è la cercata quanti-

tà

tà razionale. Le date regole possono bastare per sapere come regolarsi in altri casi consimili. Per altro molte volte accaderà, che la quantità sia talmente imbarazzata d'irrazionali, che ridur non si possa alla razionalità.

ARTICOLO X.

Della maniera di determinare il valore di quelle frazioni, nelle quali la sostituzione di una certa quantità in luogo della variabile manda a zero tanto il numeratore, che il denominatore.

225. Sovente nel calcolo accade, che nel cercare certi valori, si trovino essi espressi da una frazione, nel di cui numeratore, e denominatore entra la variabile: Così per esempio giusta i numeri 709., 719. Tomo IV., data l'equazione a una curva come sarebbe $x^6-2ax^5-x^4y+a^2x^4+2ax^3y-a^4x^2-2a^3xy+2a^5x+a^4y-a^6=0$, per trovare gli infiniti punti, che somministrano la costruzione di questa curva bisogna ridur sola da una parte del segno d'egualità una delle variabili, come sarebbe la y, e dall'altra parte lasciare tutti gli altri termini affetti dall'altra variabile x, nel qual modo l'equazione proposta acquista questa forma

$$y=\frac{x^6-2ax^5+a^2x^4-a^4x^2+2a^5x-a^6}{x^4-2ax^3+2a^3x-a^4},$$ indi in luogo di x sostituire successivamente diversi valori, con che ne risultano altrettanti valori di y, che esibiscono i cercati punti della curva da descriversi. Ora molte volte succede, che qualora il valore di y viene espresso da una frazione, con sostituire in luogo di x un certo determinato valore, va a zero tanto il numeratore, che il denominatore della frazione, cioè diventa $y=\frac{0}{0}$, come accade nell'addotto esempio, allorchè si sostituisce a in luogo di x, o sia si fa $x=a$, lo che la riduce a

$$y=\frac{a^6-2a^6+a^6-a^6+2a^6-a^6}{a^4-2a^4+2a^4-a^4}=\frac{0}{0},$$ la quale espressione nulla lascia sapere del vero valore della frazione, quando per altro questo valore risultando certo, e fisso nella sostituzione, che si fa, di qualunque altra quantità in luogo di x, tale pure esser deve eziandio allorchè si fa $x=a$, come in realtà anche nel presente caso lo è di fatti, e per accertarsene basta dividere il numeratore $x^6-2ax^5+a^2x^4-a^4x^2+2a^5x-a^6$ della frazione pel denominatore $x^4-2ax^3+2a^3x-a^4$, con che si ha

A R-

Digitized by Google

Divisore	Dividendo	Quoziente
$x^4-2ax^3+2a^3x-a^4)$	$x^6-2ax^5+a^2x^4-a^4x^2+2a^5x-a^6$	x^2+a^2
	$x^6-2ax^5+2a^3x^3-a^4x^2$	
	$a^2x^4-2a^3x^3+2a^5x-a^6$	
	$a^2x^4-2a^3x^3+2a^5x-a^6$	
	o o o o	

che però si ottiene $y=x^2+a^2=2a^2$ con fare $x=a$. Essendo adunque certo, e fisso il valore della frazione, che nella supposizione di $x=a$ acquista una forma incerta, e vaga, fa quindi mestiere di trovare il modo di dare alla frazione un' altra forma, onde spogliata di quella vaga apparenza poterne rilevare il suo vero valore. Per farlo bisogna ricorrere all' ultimo rapporto, che ha il numeratore al denominatore mediante l'aumentare la variabile x del suo elemento dx, sostituendo cioè tanto nel numeratore, che nel denominatore $x+dx$ in luogo di x, o sia $a+dx$ in vece di x, poichè si suppone $x=a$. Per mezzo di questa sostituzione l' equazione $y=\frac{x^6-2ax^5+a^2x^4-a^4x^2+2a^5x-a^6}{x^4-2ax^3+2a^3x-a^4}$ si cambierà nella seguente

$$y=\frac{\overline{a+dx}^6-2a\times\overline{a+dx}^5+a^2\times\overline{a+dx}^4-a^4\times\overline{a+dx}^2+2a^5\times\overline{a+dx}-a^6}{\overline{a+dx}^4-2a\times\overline{a+dx}^3+2a^3\times\overline{a+dx}-a^4},$$

vale a dire

a^6

$$\begin{array}{l}
a^6 + 6a^5 dx + 15a^4 \overline{dx}^2 + 20a^3 \overline{dx}^3 + 15a^2 \overline{dx}^4 + 6a \overline{dx}^5 + \overline{dx}^6 \\
-2a^6 - 10a^5 dx - 20a^4 \overline{dx}^2 - 20a^3 \overline{dx}^3 - 10a^2 \overline{dx}^4 - 2a \overline{dx}^5 \\
+ a^6 + 4a^5 dx + 6a^4 \overline{dx}^2 + 4a^3 \overline{dx}^3 + a^2 \overline{dx}^4 \\
- a^6 - 2a^5 dx - a^4 \overline{dx}^2 \\
+2a^6 + 2a^5 dx \\
- a^6 \\
\hline
+ a^4 + 4a^3 dx + 6a^2 \overline{dx}^2 + 4a \overline{dx}^3 + \overline{dx}^4 \\
-2a^4 - 6a^3 dx - 6a^2 \overline{dx}^2 - 2a \overline{dx}^3 \\
+2a^4 + 2a^3 dx \\
- a^4
\end{array}$$

Ora tanto nel numeratore, che nel denominatore di questa nuova frazione la prima, la seconda, e la terza colonna verticale va a zero a motivo della contrarietà de' segni, e la quarta colonna verticale del numeratore si riduce a $4a^3 \overline{dx}^3$, del denominatore a $2a \overline{dx}^3$; poichè adunque le susseguenti colonne a fronte di queste si annullano (pel num. 22.), l' equazione si ridurrà a $y = \frac{4a^3 \overline{dx}^3}{2a \overline{dx}^3} = 2a^2$, e questo valore di y è quello stesso, che poc' anzi mediante la divisione abbiamo ritrovato. Ecco pertanto come col metodo esposto ridurre si possa la frazione a esibirci il suo vero valore.

226.

226. La maniera d'operare è la stessa, ancorchè nella frazione entrino quantità radicali. Vediamolo nella seguente equazione

$$y = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \times \overline{a^3 x - a^2 x^2 - a x^3 + x^4}} + a\sqrt{\frac{3}{2} \times \overline{a^2 - x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} a^2 x - a x^2 + \frac{1}{2} x^3} + a\sqrt{\frac{1}{2} \times \overline{a - x}}},$$ la quale con fare

$x = a$ diventa $y = \frac{0}{0}$: Che però a fine di rintracciarne il vero valore, ricorriamo

al metodo poc'anzi usato: Quì però si osservi, che qualora nella frazione entrano quantità radicali, non si può sempre prevalere della sostituzione di $a+dx$ in luogo di x, ma molte volte è necessario sostituire in sua vece $a-dx$, poichè se si sostituisse $a+dx$, le quantità, dalle quali hassi finalmente a ricavare il ricercato valore della frazione, risulterebbero immaginarie. Ciò appunto accaderebbe nel caso del proposto esempio, come or ora vedremo; per lo che in luogo di x bisognerà sostituire $a-dx$. Ciò si faccia, e ne verrà

$$y = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \times \overline{a^3 \times \overline{a-dx} - a^2 \times \overline{a-dx}^2 - a \times \overline{a-dx}^3 + (a-adx)^4}} + a\sqrt{\frac{3}{2} \times \overline{a^2 - (a-dx)^2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} a^2 \times \overline{a-dx} - a \times \overline{a-dx}^2 + \frac{1}{2} \times \overline{a-dx}^3} + a\sqrt{\frac{1}{2} \times \overline{a-(a-dx)}}},$$

vale a dire

$$\frac{\sqrt{\begin{array}{l} +\frac{3}{2}a^4-\frac{3}{2}a^3dx-\frac{3}{2}a^2\overline{dx}^2+\frac{3}{2}a\overline{dx}^3+\frac{3}{2}\overline{dx}^4 \\ -\frac{3}{2}a^4+3a^3dx-\frac{9}{2}a^2\overline{dx}^2-6a\overline{dx}^3 \\ -\frac{3}{2}a^4+\frac{9}{2}a^3dx+9a^2\overline{dx}^2 \\ +\frac{3}{2}a^4-6a^3dx \end{array}}+a\sqrt{\begin{array}{l} \frac{3}{2}a^2+3adx-\frac{3}{2}\overline{dx}^2 \\ -\frac{3}{2}a^2 \end{array}}}{\sqrt{\begin{array}{l} +\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}a^2dx-a\overline{dx}^2-\frac{1}{2}\overline{dx}^3 \\ -a^3+2a^2dx+\frac{3}{2}a\overline{dx}^2 \\ +\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}a^2dx \end{array}}+a\sqrt{\begin{array}{l} +\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}dx \\ -\frac{1}{2}a \end{array}}}$$

Ora nel primo membro del numeratore la prima, e la seconda colonna verticale viene distrutta dalla contrarietà de' segni, e la terza si riduce a $\sqrt{3a^2\overline{dx}^2}$, a confronto della quale vanno a zero le susseguenti colonne verticali. Per la stessa ragione il secondo membro del numeratore si riduce ad $a\sqrt{3adx}$; così il primo membro del denominatore si riduce a $\sqrt{\frac{1}{2}a\overline{dx}^2}$, e il secondo membro ad $a\sqrt{\frac{1}{2}dx}$: Onde il valore di y trovasi essere

$$y=\frac{\sqrt{3a^2\overline{dx}^2}+a\sqrt{3adx}}{\sqrt{\frac{1}{2}a\overline{dx}^2}+a\sqrt{\frac{1}{2}dx}}=\sqrt{6a},$$

come si trova mediante la divisione del numeratore pel denominatore.

227.

227. Se in luogo di x ſi foſſe ſoſtituito $a+dx$, ſi ſarebbero trovati immaginarj i termini $a\sqrt{3adx}$, $a\sqrt{\frac{1}{2}dx}$, vale a dire ſarebbero ſtati

$a\sqrt{-3adx}$, $a\sqrt{-\frac{1}{2}dx}$, e in conſeguenza immaginario ſarebbe ſtato il valore di y: onde per evitare queſto inconveniente è ſtato d' uopo ſoſtituire $a-dx$ in luogo di x. E qui deveſi avvertire, che nel numeratore, e nel denominatore ſi deve ſoſtituire la ſteſſa quantità, cioè o $a+dx$, o $a-dx$.

228. Non ſempre però ſi può operare nel modo pur ora praticato, ma molte volte è di meſtiere ridurre a forma opportuna le quantità radicali mediante l' eſtrazione delle radici, la quale eſtrazione ſi deve produrre per tanti termini, quanti baſtano per giungere a quello, che dalla contrarietà de' ſegni non viene diſtrutto. Allora poi ſoltanto ſarà neceſſario eſtrarre la radice indicata dall' eſponente del vincolo, quando la contrarietà de' ſegni non manda a zero la prima colonna verticale, in cui non entra l' elemento dx, come abbaſtanza ſi può rilevare dal precedente eſempio. Si debba per eſempio trovare il valore di y eſpreſſo dall' equazione $y=$

$$\frac{\sqrt{2a-x}\times\sqrt[3]{a^3+2x^2-ax}-\sqrt{x}\times\sqrt[3]{4ax-x^2}}{a-\sqrt{2x^2-ax}},$$ la quale con ſupporre $x=a$ diventa

$y=\frac{0}{0}$. Si ſoſtituiſca pertanto $a+dx$ in luogo di x, e con ciò ne verrà

$$\frac{\sqrt{\begin{matrix}2a-dx\\-a\end{matrix}}\times\left\{\begin{matrix}a^2+6adx+3\overline{dx}^2\\+3a^2-adx\\-a^2\end{matrix}\right\}-\sqrt{a+dx}\times\left\{\begin{matrix}4a^2+4adx-\overline{dx}^2\\-a^2-2adx\end{matrix}\right\}}{a-\sqrt{\begin{matrix}2a^2+4adx+2\overline{dx}^2\\-a^2-adx\end{matrix}}},$$

o ſia

$$\frac{\sqrt{a-dx} \times \overline{3a^2+5adx+3\overline{dx}^2} - \sqrt{a+dx} \times \overline{3a^2+2adx-\overline{dx}^2}}{a-\sqrt{a^2+3adx+2\overline{dx}^2}}.$$

Si estragga la radice quadrata da ciascuno de' tre radicali $\sqrt{a-dx}$, $\sqrt{a+dx}$, $\sqrt{a^2+3adx+2\overline{dx}^2}$, e producendo a tre termini l' estrazione, la radice del primo $\sqrt{a-dx}$ sarà $\sqrt{a} - \frac{dx}{2\sqrt{a}} - \frac{\overline{dx}^2}{8a\sqrt{a}}$ ec.; del secondo $\sqrt{a+dx}$ sarà $\sqrt{a} + \frac{dx}{2\sqrt{a}} - \frac{\overline{dx}^2}{8a\sqrt{a}}$ ec.; del terzo $\sqrt{a^2+3adx+2\overline{dx}^2}$ sarà $a + \frac{3}{2}dx - \frac{\overline{dx}^2}{8a}$ ec. Si facciano le indicate operazioni, e l' equazione diverrà

$$
\left.\begin{array}{r}
3a^2\sqrt{a} + 5adx\sqrt{a} + 3\,\overline{dx}^2\sqrt{a} \\
-\frac{3}{2}adx\sqrt{a} - \frac{5}{2}\overline{dx}^2\sqrt{a} - \dfrac{\frac{3}{2}\overline{dx}^3}{\sqrt{a}} \\
-\frac{3}{8}\overline{dx}^2\sqrt{a} - \dfrac{\frac{5}{8}\overline{dx}^3}{\sqrt{a}} \\
-3a^2\sqrt{a} - 2adx\sqrt{a} + \overline{dx}^2\sqrt{a} \\
-\frac{3}{2}adx\sqrt{a} - \overline{dx}^2\sqrt{a} + \dfrac{\overline{dx}^3}{2a\sqrt{a}} \\
+\frac{3}{8}\overline{dx}^2\sqrt{a} + \dfrac{\frac{1}{4}\overline{dx}^3}{\sqrt{a}}
\end{array}\right\}\text{numeratore}
$$

$$
\begin{array}{l}
a - \frac{3}{2}dx + \dfrac{\overline{dx}^2}{8a} \qquad \text{denominatore} \\
-a
\end{array}
$$

Ora la contrarietà de' segni manda a zero la prima colonna verticale tanto del numeratore, che del denominatore: la seconda poi è bensì eguale a zero nel numeratore, ma nel denominatore è $\frac{-3dx}{2}$; che però il valore di y som-

miniſtrato da queſta ſeconda colonna è $= \frac{0}{-\frac{1dx}{2}} = \frac{2 \times 0}{-3dx} = \frac{0}{0}$: Si paſſi

dunque alla terza colonna, e ſi troverà finalmente $y = \frac{\frac{\overline{dx}^2 \sqrt{a}}{2}}{\frac{\overline{dx}^2}{8a}} = 4a\sqrt{a}$.

229. Proporrò un'altro eſempio, in cui meglio ſi vedrà quali ſono i caſi, in cui ſi deve, o non ſi deve eſtrarre dai radicali la radice, poichè l'uno, e l'altro caſo egli abbraccierà. Si debba pertanto determinare il valore di y eſpreſſo da queſta equazione $y = \frac{a + \sqrt{2a^2 - 2ax} - \sqrt{2ax - xx}}{a - x + \sqrt{aa - xx}}$, che mediante il fare

$x = a$ diventa $y = \frac{0}{0}$. Si ſoſtituiſca $a - dx$ in luogo di x a fine di evitare gli immaginarj, e ne verrà

$$\frac{a + \sqrt{2a^2 + 2adx - 2a^2} - \sqrt{2a^2 - 2adx - \overline{dx}^2 - a^2 + 2adx}}{a - a + \sqrt{a^2 + 2adx - \overline{dx}^2 - a^2}}$$

che ſi riduce alla ſeguente mediante il togliere i termini, che ſi elidono

$$\frac{a + \sqrt{2adx} - \sqrt{a^2 - \overline{dx}^2}}{\sqrt{2adx - \overline{dx}^2}}$$

nel-

nella quale entrano tre radicali, e pure folamente dal radicale $\sqrt{a^2 - \overline{dx}^2}$ fi deve eftrarre la radice, perchè in quefto folo ha luogo la quantità coftante a^2, che non involve l' elemento dx. Si eftragga adunque la radice da

$\sqrt{a^2 - \overline{dx}^2}$, che farà $a - \frac{\overline{dx}^2}{2a}$ ec. da foftituirfi nell'equazione in luogo di

$\sqrt{a^2 - \overline{dx}^2}$, con che l' equazione diverrà

$$\frac{a + \sqrt{2adx} - a + \frac{\overline{dx}^2}{2a}}{\sqrt{2adx - \overline{dx}^2}}$$

confeguentemente trovafi effere $y = \frac{\sqrt{2adx}}{\sqrt{2adx}} = 1$.

230. Se nell'equazione propofta avranno luogo funzioni inefplicabili, fi dovrà operare relativamente a quanto ho efpofto all' Articolo VII.. Quantunque la cofa fia chiara per fe fteffa, pure per togliere qualunque ombra di difficoltà, che nafcer poteffe, difcenderò a un efempio particolare. Si debba pertanto ritrovare il valore di y efpreffo dalla feguente equazione

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x-1} + \frac{\overline{2x-1} \times \overline{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}}}{x \times \overline{x-1}}$$

nel cafo di $x = 1$ in cui è $y = \frac{-1+1}{0} = \frac{0}{0}$. Si faccia

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{ec.} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

—

$- \frac{1}{x+4} -$ ec., giusta il num. 157., poichè sono evanescenti i termini infinitamente distanti dal primo della serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ ec. Che se si ridurranno allo stesso denominatore i termini $+ \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{x+2}$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{x+3}$ ec., ne verrà

$$S = 1 + \frac{x-1}{2 \times \overline{x+1}} + \frac{x-1}{3 \times \overline{x+2}} + \frac{x-1}{4 \times \overline{x+3}} + \frac{x-1}{5 \times \overline{x+4}} + \text{ec.},$$

che con sostituire $1 + dx$ in luogo di x diventa

$$S = 1 + \frac{dx}{2 \times \overline{2+dx}} + \frac{dx}{3 \times \overline{3+dx}} + \frac{dx}{4 \times \overline{4+dx}} + \frac{dx}{5 \times \overline{5+dx}} + \text{ec.}:$$

Ma mediante l'attual divisione si trova

$$\frac{dx}{2+dx} = \frac{dx}{2} - \frac{\overline{dx}^2}{2^2} + \frac{\overline{dx}^3}{2^3} - \frac{\overline{dx}^4}{2^4} + \frac{\overline{dx}^5}{2^5} - \text{ec.};$$

$$\frac{dx}{3+dx} = \frac{dx}{3} - \frac{\overline{dx}^2}{3^2} + \frac{\overline{dx}^3}{3^3} - \frac{\overline{dx}^4}{3^4} + \frac{\overline{dx}^5}{3^5} - \text{ec.};$$

$$\frac{dx}{4+dx} = \frac{dx}{4} - \frac{\overline{dx}^2}{4^2} + \frac{\overline{dx}^3}{4^3} - \frac{\overline{dx}^4}{4^4} + \frac{\overline{dx}^5}{4^5} - \text{ec. ec.,}$$

che

Digitized by Google

che però distribuendo i termini secondo la loro omogeneità, si ha

$$S = 1 + \overline{dx}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \text{ec.}\right)$$

$$- \overline{dx}^2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \overline{dx}^3\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{ec.}\right)$$

$$- \overline{dx}^4\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{6^5} + \text{ec.}\right) \text{ ec.}$$

Si faccia $+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ec.} = M$;

$+ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ec.} = N$;

$+ \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ec.} = P$;

$+ \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{ec.} = Q$ ec.,

lo

lo che darà $S = 1 + Mdx - N\overline{dx}^2 + P\overline{dx}^3 - Q\overline{dx}^4 + ec.$; onde l' equazione propoſta ſi cambierà in

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1} + \frac{\overline{2x - 1} \times \overline{1 + Mdx - N\overline{dx}^2 + P\overline{dx}^3 - Q\overline{dx}^4 + ec.}}{x \times \overline{x - 1}},$$

che, con ſoſtituire $1 + dx$ in luogo di x, diventa

$$y = \frac{\overline{dx}^2 - 1}{dx} + \frac{\overline{2dx + 1} \times \overline{1 + Mdx - N\overline{dx}^2 + P\overline{dx}^3 - Q\overline{dx}^4 + ec.}}{\overline{1 + dx} \times dx},$$

che mediante la riduzione allo ſteſſo denominatore acquiſta la ſeguente forma

$$y = \frac{+dx + \overline{dx}^2 + \overline{dx}^3 + Mdx + \overline{2M - N} \times \overline{dx}^2 - \overline{2N + P} \times \overline{dx}^3 + \overline{2P - Q} \times \overline{dx}^4 \text{ ec.}}{\overline{1 + dx} \times dx}$$

$$= \frac{1 + dx + \overline{dx}^2 + M + \overline{2M - N} \times dx - \overline{2N + P} \times \overline{dx}^2 + \overline{2P - Q} \times \overline{dx}^3 \text{ ec.}}{1 + dx}.$$

Si faccia per ultimo $dx = 0$, e l' equazione ſi ridurrà a $y = 1 + M =$

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} +$ ec., che è il cercato valore di y, allorchè è $x = 1$.

231. Paſſiamo adeſſo a vedere ancora l' applicazione del preſente metodo a quelle frazioni, che contengono quantità tranſcendenti. E primieramente ſi debba determinare il valore dell' equazione $y = \frac{1 - x^m}{x - 1 + l.x}$ nella ſuppoſizione di

$x = 1$,

$x=1$, nel qual caso la proposta equazione si cambia in $y=\frac{0}{0}$, poichè $l.\,x = l.\,1 = 0$. Si sostituisca $1+dx$ in luogo di x; con che essa acquisterà la seguente forma $\frac{1-(1+dx)^m}{1+dx-1+l.\,\overline{1+dx}}$; vale a dire [con inalzare $1+dx$ all'indicata potestà m, e con mettere

$dx-\frac{1}{2}\overline{dx}^2+\frac{1}{3}\overline{dx}^3$ ec. in luogo di $l.\,\overline{1+dx}$ a norma del num. CXII. Tomo IV., perchè il $l.\,x$ è iperbolico]

$$\frac{+1-1-m\,dx-m\times\overline{m-1}\times\overline{dx}^2\ \text{ec.}}{+1-1+2\,dx-\frac{1}{2}\overline{dx}^2\ \text{ec.}};$$

onde si trova $y=-\frac{m\,dx}{2\,dx}=-\frac{1}{2}m$.

232. Cercasi in secondo luogo il valore di y espresso dall'equazione

$y=\frac{-1-2x+b^x+l.\,\overline{1+x}}{1+x+\frac{1}{2}x^2-b^x}$ nella supposizione di $x=0$, nel qual caso l'equazione diventa $y=\frac{0}{0}$. Poichè per ipotesi $x=0$, si sostituisca dx in luogo di x, mentre $0+dx=dx$, e fatta la sostituzione si avrà

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l}
-1-2dx+\frac{1}{2}\overline{dx}^2+\frac{1}{6}\overline{dx}^3\\[4pt]
+1+dx-\frac{1}{2}\overline{dx}^2+\frac{1}{3}\overline{dx}^3\\[4pt]
+dx\\
\hline
+1+dx+\frac{1}{2}\overline{dx}^2\\[4pt]
-1-dx-\frac{1}{2}\overline{dx}^2-\frac{1}{6}\overline{dx}^3
\end{array}
$$

vale a dire con togliere i termini, che si elidono

$$y=\frac{\frac{3}{6}\overline{dx}^3}{-\frac{1}{6}\overline{dx}^3}=-3.$$

233. Si osservi, che a norma del num. CXI. Tomo IV., ove si è trovato $a^u = 1 + \frac{qu}{1} + \frac{q^2u^2}{1.\ 2} + \frac{q^3u^3}{1.\ 2.\ 3}$ ec., la quantità b^x, che diventa b^{dx} con sostituire dx in luogo di x, cade sotto questa espressione

$1 + dx + \frac{1}{2}\overline{dx}^2 + \frac{1}{6}\overline{dx}^3$ ec., mentre prevalendomi del sistema de' logaritmi iperbolici, de' quali b è la base, è $q = 1$ giusta il num. CXI. Tomo IV.

Digitized by Google

234 In terzo luogo sia proposta l' equazione

$y = \frac{1 - \text{Sen.}\, x + \text{Cos.}\, x}{-1 + \text{Sen.}\, x + \text{Cos.}\, x}$, la quale, allorchè la x si fa eguale al quadrante, cioè a 90 gradi, diventa $y = \frac{0}{0}$; che però cercasi in tale supposizione il valore di y. Si sostituisca $x + dx$ in luogo di x, e ne verrà

$$\frac{1 - \text{Sen.}\, \overline{x + dx} + \text{Cos.}\, \overline{x + dx}}{-1 + \text{Sen.}\, \overline{x + dx} + \text{Cos.}\, \overline{x + dx}}:$$

cioè a dire (giusta le formole [I.], [III.] num. 31. del calcolo de' triangoli piani Tom. III.)

$$\frac{1 - \text{Sen.}\, x\, \text{Cos.}\, dx - \text{Cos.}\, x\, \text{Sen.}\, dx + \text{Cos.}\, x\, \text{Cos.}\, dx - \text{Sen.}\, x\, \text{Sen.}\, dx}{-1 + \text{Sen.}\, x\, \text{Cos.}\, dx + \text{Cos.}\, x\, \text{Sen.}\, dx + \text{Cos.}\, x\, \text{Cos.}\, dx - \text{Sen.}\, x\, \text{Sen.}\, dx},$$

che si riduce a

$$\frac{1 - 1 \times 1 - 0 \times dx + 0 \times 1 - 1 \times dx}{-1 + 1 \times 1 + 0 \times dx + 0 \times 1 - 1 \times dx}$$

(perchè Sen. $x = 1$, Cos. $x = 0$, Sen. $dx = dx$ pel num. 21. 3°, e Cos. $dx = 1$),

o sia $y = \frac{1 - 1 - 1 \times dx}{-1 + 1 - 1 \times dx} = \frac{-1 \times dx}{-1 \times dx} = \frac{-1}{-1} = 1$,

chè è il valore della proposta equazione $y = \frac{1 - \text{Sen.}\, x + \text{Cos.}\, x}{-1 + \text{Sen.}\, x + \text{Cos.}\, x}$ allorchè si suppone $x = 90°$.

235. Non solo accade, che la sostituzione di un certo valore in luogo della variabile x faccia andare a zero il numeratore, e il denominatore di una proposta frazione, ma alle volte succede all' opposto, che la sostituzione di un tal valore

 renda

Digitized by Google

renda l'uno, e l'altro infinito, il che non lascia ravvisare qual sia il di lui vero valore. Qualora ciò accadrà si potrà sempre coll' ajuto del metodo esposto ritrovare qual debba essere nel caso di una tale supposizione il vero valore della frazione. L'esempio renderà piana la cosa. Debbasi determinare qual sia il valore di y espresso da questa equazione $y = \dfrac{\overline{-1+x} \times \text{Tang.}\ \frac{c}{4}x}{\overline{-1} + \overline{l.\,x} \times \text{Sec.}\ \frac{c}{4}x}$ nel caso di $x = 1$, nel qual caso il numeratore, e il denominatore della frazione è infinito, poichè designando c la circonferenza del circolo, $\frac{c}{4}x$ ne esprime il quadrante, e tanto la tangente, che la secante di $90°$. è infinita. Si sostituisca $1 + dx$ in luogo di x, e ne verrà $\dfrac{\overline{-1+dx} \times \text{Tang.}\ \overline{\frac{c}{4}+\frac{c}{4}dx}}{\overline{-1+dx} \times \text{Sec.}\ \overline{\frac{c}{4}+\frac{c}{4}dx}}$,

(poichè $l.\ \overline{1+dx} = dx - \frac{1}{2}\overline{dx}^2$ ec., che si riduce a $l.\ \overline{1.+dx} = dx$, mentre le potestà più alte di dx a suo confronto vanno a zero) cioè a dire (con sostituire i valori di Tang. $\overline{\frac{c}{4}+\frac{c}{4}dx}$, e di Sec. $\overline{\frac{c}{4}+\frac{c}{4}dx}$ presi dal num. 37. (XIII), (XIX), del calcolo de' triangoli piani Tomo III.)

Tang.

Digitized by Google

$$\frac{\overline{-1+dx}\times\dfrac{\overline{\text{Tang.}\,\frac{c}{4}+\text{Tang.}\,\frac{c}{4}dx}}{\overline{1-\text{Tang.}\,\frac{c}{4}\times\text{Tang.}\,\frac{c}{4}dx}}}{\overline{-1+dx}\times\dfrac{\overline{\text{Sec.}\,\frac{c}{4}\times\text{Sec.}\,\frac{c}{4}dx}}{1-\text{Tang.}\,\frac{c}{4}\times\text{Tang.}\,\frac{c}{4}dx}} =$$

$$\frac{\overline{-1+dx}\times\overline{\text{Tang}\,\frac{c}{4}+\text{Tang.}\,\frac{c}{4}dx}}{\overline{-1+dx}\times\text{Sec.}\,\frac{c}{4}\times\text{Sec.}\,\frac{c}{4}dx}.$$

Ma essendosi fatto il raggio $=1$, è Sec. $\frac{c}{4}dx=1$, e Tang. $\frac{c}{4}dx$ a confronto di Tang. $\frac{c}{4}$ va a zero; quindi la frazione si riduce a $\dfrac{\text{Tang.}\,\frac{c}{4}}{\text{Sec.}\,\frac{c}{4}}$. Ora in luogo di Sec. $\frac{c}{4}$ si sostituisca il suo valore preso dal num. 26. [III.] del calcolo de' triangoli piani Tomo III., che è $\dfrac{\text{Tang.}\,\frac{c}{4}}{\text{Sen.}\,\frac{c}{4}}$,

e si

e si avrà $\dfrac{\text{Tang}\ \frac{c}{4}}{\dfrac{\text{Tang.}\ \frac{c}{4}}{\text{Sen.}\ \frac{c}{4}}} = \dfrac{\text{Tang.}\ \frac{c}{4} \times \text{Sen.}\ \frac{c}{4}}{\text{Tang.}\ \frac{c}{4}} = \text{Sen.}\ \frac{c}{4} = 1$, perchè

$\text{Sen.}\ \frac{c}{4} = 1$.

236. Abbiamo veduto al num. 14, che il prodotto nato da due fattori, de' quali uno è infinito, e l'altro infinitamente piccolo, è una quantità finita, onde qualunque quantita può essere espressa da questo prodotto $0 \times \infty$; che però qualora si trovi un tale prodotto, che la sostituzione di un certo valore in luogo della variabile x faccia andare a zero uno de' suoi valori, e renda l'altro infinito, indefinito risulterà il di lui valore, e per poterlo determinare in tal caso, sarà mestiere ricorrere al presente metodo. Si debba per esempio determinare qual sia il valore del prodotto $\overline{1 - x} \times \text{Tang.}\ \frac{c}{4}\,x$ nella supposizione di $x = 1$, nel qual caso $1 - x = 0$, e $\text{Tang.}\ \frac{c}{4}\,x = \infty$. Si sostituisca $1 + dx$ in luogo di x, e ne verrà $-dx \times \text{Tang.}\ \overline{\frac{c}{4} + \frac{c}{4}\,dx}$, cioè [con sostituire il valore di $\text{Tang}\ \overline{\frac{c}{4} + \frac{c}{4}\,dx}$ preso dal num. 37. (XIII.) del calcolo de' triangoli piani Tomo III.) $-dx \times \dfrac{\overline{\text{Tang.}\ \frac{c}{4} + \text{Tang.}\ \frac{c}{4}\,dx}}{1 - \text{Tang}\ \frac{c}{4} + \text{Tang.}\ \frac{c}{4}\,dx}$. Ora $\text{Tang.}\ \frac{c}{4}\,dx$

=

Digitized by Google

$= \frac{c}{4} dx$ (pel num. 21. 3°), e a confronto di Tang. $\frac{c}{4}$ va a zero tanto 1, che

Tang. $\frac{c}{4} dx$; dunque il precedente valore si riduce a

$$\frac{-dx \times \text{Tang.}\frac{c}{4}}{-\text{Tang.}\frac{c}{4} \times \frac{c}{4} dx} = \frac{1}{\frac{c}{4}} = \frac{4}{c},$$ che è il cercato valore di

$\overline{1-x} \times \text{Tang.}\ \frac{c}{4} x$ nella supposizione di $x = 1$.

237. Rimane per ultimo, che applichiamo il metodo praticato fin' ora a un' altro caso, che fare potrebbe non lieve difficoltà: Capitano alle volte alcune espressioni, le quali con sostituire un certo valore in luogo della variabile x acquistano questa forma $\infty - \infty$, e tale è la presente espressione

$$\frac{-1}{\overline{x-1} \times \text{Sen.}\ \frac{c}{4} x} + \frac{x}{l.\,x}$$ qualor si suppone $x = 1$, in cui ciascun de' due

termini diventa infinito, a motivo che andando a zero i denominatori, essa trovasi

essere $-\frac{1}{0} + \frac{1}{0}$. Ora del valore di questa espressione nulla determinare si può,

se non con rilevare qual sia la differenza, che passa tra questi due infiniti, nè questa ravvisare si può, fintanto che la detta espressione ritiene la forma, sotto cui è proposta. Per darle adunque un' altra forma, onde scuoprire il di lei valore, si sostituisca $1 + dx$ in luogo di x, e ne verrà $$\frac{-1}{\overline{1+dx-1} \times \text{Sen.}\ \frac{c}{4} + \frac{c}{4} dx}$$

+

$+\frac{1+dx}{l.\ \overline{1+dx}}$, vale a dire $\frac{-1}{dx \times \text{Sen. } \frac{c}{4} \text{ Cof } \frac{c}{4} dx + \text{Cof. } \frac{c}{4} \text{ Sen. } \frac{c}{4}\, dx}$

$+\frac{1+dx}{dx - \frac{1}{2}\overline{dx}^2 + \frac{1}{3}\overline{dx}^3}$, la quale a motivo che

Sen. $\frac{c}{4}$ Cof. $\frac{c}{4}\, dx = 1 \times 1$, e Cof. $\frac{c}{4}$ Sen. $\frac{c}{4}\, dx = 0 \times \frac{c}{4}\, dx$, diventa

$$-\frac{1}{dx} + \frac{1+dx}{dx \times 1 - \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{3}\overline{dx}^2} = -\frac{1 + \frac{1}{2}dx - \frac{1}{3}\overline{dx}^2 + 1 + dx}{dx - \frac{1}{2}\overline{dx}^2 + \frac{1}{3}\overline{dx}^3}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}dx - \frac{1}{3}\overline{dx}^2}{dx - \frac{1}{2}\overline{dx}^2 + \frac{1}{3}\overline{dx}^3} = \frac{\frac{3}{2}dx}{dx} = \frac{3}{2}$$, perchè a confronto di dx

vanno a zero i termini, ne' quali entra $\overline{dx}^2$, $\overline{dx}^3$. Il cercato valore adunque della proposta espressione è $= \frac{3}{2}$.

C A-

CAPO II.

Del metodo diretto delle tangenti.

ARTICOLO I.

Modo di determinare il valore della subtangente, della tangente di una data curva e delle altre linee analoghe ec.

238. Intendo, che sia data una curva, ogniqualvolta sia data la di lei equazione. Il metodo diretto delle tangenti è quello, con cui, essendo proposta l'equazione di una curva, si ritrova il valore della tangente, subtangente, e delle altre linee analoghe, che convengono a un di lei dato punto. E quantunque abbia trattato questa parte delle linee curve nel quarto Tomo al Capo IV. Art. VI. pure non è fuor di proposito il ripigliar qui di nuovo questo argomento, e perchè col calcolo differenziale più facilmente, e speditamente si giunge al fine bramato, e perchè qui prendo a trattarlo con maggiore generalità, tanto cioè rispetto alle curve algebraiche, e queste o riferite a un diametro, o riferite a un foco, che rispetto alle curve transcendenti, e a doppia curvatura. Prima di tutto però osserviamo, che se un' espressione qualunque sarà $=0$, sarà pure $=0$ il di lei differenziale, e se due espressioni saranno eguali fra loro, eguali saranno eziandio i loro differenziali; poichè se una espressione è $=0$, tale sussiste tuttavia se si scrive $x+dx$ in luogo di x, nel qual caso la y passa ad essere $y+dy$; onde se da questa quantità, che ne risulta si sottrerrà l'espressione proposta, il residuo sarà il di lei differenziale, che sarà in conseguenza $=0$. Sia per esempio y una funzione di x, che venga esibita da questa equazione (A) $y^2+My+N=0$, nella quale si sostituisca $y+dy$ in luogo di y: e siccome in tal caso deve x passar ad essere $x+dx$, i differenziali di M, N, che sono funzioni di x, acquistano questa forma, [pel num. 171.] $d.M=n.dx$ $d.N=\iota dx$ e in conseguenza l'equazione (A) con fare queste sostituzioni diventa $y^2+2ydy+My$ $+Mdy+mydx+N+ndx=0$ (ho ommesso $\overline{dy}^2$ per la ragione di sopra addotta), da cui si sottragga la stessa equazione [A], e ne verrà $2ydy+Mdy+mydx+ndx=0$ [B], che è il differenziale dell'equazione [A]. Ora da questa equazione [B] si ricava $\frac{dy}{dx}=\frac{-my-n}{2y+M}$: Ed ecco, che siccome l'equazione finita (A) esprime la relazione, o sia il rapporto, che passa tra le variabili x y, così l'equazione differenziale [B] esprime il rapporto, che passa fra gli elementi dy, dx. Questa ragione poi $dy:dx$ resta indeterminata fintanto che nel suo

Digitized by Google

ſuo valore $\frac{-my-n}{2y+M}$ ſuſſiſtono le due variabili x, y, avvegna che poſſa egli ſubire tante determinazioni, quanti ſono i valori, che può avere la y, i quali valori di y hanſi a prendere dalla data equazione [A], e nel caſo preſente ſono due, poichè la funzione y viene definita da un' equazione di ſecondo grado: Se veniſſe definita da un' equazione di terzo grado, la y avrebbe tre valori, e in conſeguenza tre ſarebbero i rapporti di $dy : dx$, Se la funzione y foſſe definita da un'equazione di quarto grado, quattro ſarebbero l' eſpreſſioni del rapporto di $dy : dx$ corriſpondenti ai quattro valori di y ec. Di fatto il differenziale dy aſcende ad altrettante dimenſioni, quante ne ha la y, come ſi può rilevare dalla data equazione (A). Eſſa ſi differenzi, e ſi avrà $2ydy + Mdy + ydM + dN = 0$, da cui ſi

prenda il valore di y, che è $y = \frac{-Mdy - dN}{2dy + dM}$, quale ſoſtituito in luogo di y

nell' equazione (A), la riduce alla ſeguente

$$\frac{M^2\overline{dy}^2 + 2MdNdy + \overline{dN}^2}{4\overline{dy}^2 + 4dMdy + \overline{dM}^2} - \frac{M^2dy - MdN}{2dy + dM} + N = 0,$$ cioè [mediante

la riduzione allo ſteſſo denominatore] $M^2\overline{dy}^2 + 2MdNdy + \overline{dN}^2 - 2M^2\overline{dy}^2 - 2MdNdy - M^2dMdy - MdMdN + 4N\overline{dy}^2 + 4NdMdy + N\overline{dM}^2 = 0$, vale a dire $\overline{4N - M^2} \times \overline{dy}^2 + \overline{4N - M^2} \times dMdy + N\overline{dM}^2 - MdMdN + \overline{dN}^2 = 0$,

che riduco a queſta forma $\overline{dy}^2 + dMdy = \frac{N\overline{dM}^2 - MdMdN + \overline{dN}^2}{M^2 - 4N}$,

indi la riſolvo ſecondo il metodo delle quadratiche affette, e mi viene

$dy = -\frac{1}{2}dM \pm \frac{\left(\frac{1}{2}MdM - dN\right)}{\sqrt{M^2 - 4N}}$, che ſono i due differenziali de' due

va-

valori di y presi dall' equazione [A], cioè di $y = -\frac{1}{2}M \pm \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4N}$.

A fine pertanto di rendere determinato il valore della ragione di $dy : dx$, fa di mestiere eliminare la y coll' ajuto delle due equazioni, che sono la proposta finita, e la differenziale, del che in seguito vedremo gli esempj. Dopo essersi trovato il valore di dy si trovano colla replicata differenziazione i valori di d^2y, di d^3y ec., come avremo campo di vedere più volte in appresso. Acciò poi questi valori siano determinati devesi a norma del num. 114. prendere costante qualche elemento, che comunemente è dx. Passiamo adesso a trovare le formole generali della sottotangente, tangente, normale ec.

239. E' noto, che una secante deve incontrare la curva per lo meno in due punti; e siccome [pel num. 25. della Geom. piana Tomo III.] due punti determinano la posizione della linea retta, così basta, che vengano determinati i punti, ne' quali la secante incontra la curva, acciò la posizione della secante resti tosto determinata: Che però se la curva sarà BCME (Fig. 12.), e la secante sia AG, la di lei posizione verrà determinata dal rapporto della CQ alla QE, vale a dire dal rapporto della differenza delle ascisse BD, BH corrispondenti ai punti C, E d' intersezione alla differenza delle ordinate DC, HE. Ora a misura, che i punti C, E si vanno accostando, la secante pure si accosta a divenire tangente, così che quando i due punti C, E si saranno infinitamente accostati, onde la retta AC non interseca più la curva, ma la tocchi in due punti infinitamente prossimi, la secante cessando d' essere secante sarà passata ad essere tangente: Quindi la tangente è il limite delle secanti, vale a dire è il termine, a cui le secanti continuamente si accostano, e vi si possono accostare quanto si vuole, senza però che vi giungano mai finchè rimangono nell' ordine delle secanti. Poichè adunque il rapporto della CQ alla QE dà la posizione della secante, se di questo rapporto si cercherà il limite, egli darà la posizione della tangente.

240. L' anzidetto limite pertanto determinando la posizione della tangente, determina il punto A, in cui la tangente incontra il diametro, conseguentemente serve a determinare il valore della subtangente PA. Il limite del rapporto della CQ alla QE ci viene esibito dai lati infinitesimi MN, Nm del triangolo differenziale NMm rettangolo in N, di cui l' ipotenusa è l' arco infinitamente piccolo Mm della curva, che a norma del num. 21. 3.° si considera come una retta.

241. Proposto essendo di condurre al punto M (Fig. 12.) della curva BCME la tangente, fa di mestiere determinare il punto A, che insieme col punto M fissa la posizione della cercata tangente AM. Questo punto A poi resta determinato, qualora si determina il valore della subtangente AP. Per determinare adunque il di lei valore, dal dato punto M si abbassi all' asse BH l' ordinata $MP = y$, indi dal punto p infinitamente prossimo al punto P si alzi l' ordinata pm, e dal punto M si conduca la MN parallela all' asse BH. Sarà $Pp = MN$ l' elemento dell' ascissa $BP = x$, vale a dire sarà $Pp = MN = dx$, ed $Nm = dy$: Ma il triangolo differenziale mMN è simile al triangolo MPA [pel num. 257. Geom. Tom. III.], poichè questi due triangoli hanno i lati paralleli; quindi si ha $mN : NM :: MP : PA$,

Digitized by Google

o sia in termini analitici $dy : dx :: y : PA$, da cui si ricava $PA = \frac{ydx}{dy}$, che è la formola generale esprimente il valore della sottotangente per qualunque curva.

242. Mediante questa formola generale, e l'equazione della curva proposta, si troverà il valore della sottotangente in questo modo: Si differenzj l'equazione data, poscia si trovi il valore della dx, o della dy, e in sua vece si sostituisca nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, con che spariranno i differenziali restando sole quantità finite, che daranno il cercato valore della sottotangente per qualsivoglia punto della curva: Che se da questa generale espressione del valore della sottotangente per qualsivoglia punto della curva si vorrà dedurre il valore particolare della sottotangente, che compete a un dato punto della curva, bisognerà sostituire nel detto valor generale in luogo delle variabili x, y i valori, che loro competono relativamente al punto proposto.

243. Ho supposto, che la curva sia riferita all'asse, a cui le ordinate sono perpendicolari; per altro la formola generale della sottotangente risulta la stessa, ancorchè la curva sia riferita a un diametro, col quale le ordinate facciano un' angolo qualunque; poichè sussistendo tuttavia simili i due triangoli MNm, MpT [Fig. 13.], sussiste pure l'analogia trovata al num. 241., cioè $mN : NM :: MP : PT$, vale a dire $dy : dx :: y : PT$, da cui si ha $PT = \frac{ydx}{dy}$, come prima.

244. Leviamoci dalla generalità, e discendiamo al caso particolare. Debbasi trovare il valore della sottotangente per un qualsisia punto dell' iperbola, della quale è data l'equazione $a^2y^2 = \overline{x^2 - a^2} \times c^2$. Si differenzi questa equazione, e ne viene $2a^2ydy = 2c^2xdx$, da cui si prenda il valor di dx, che è $= \frac{a^2ydy}{c^2x}$, e si sostituisca in suo luogo nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, lo che fatto si avrà $\frac{a^2y^2}{c^2x}$, che è il cercato valore della sottotangente: Che se in luogo di a^2y^2 si sostituirà il suo valore $\overline{x^2 - a^2} \times c^2$ preso dalla data equazione, il valore trovato si cambierà in quest' altro $\frac{x^2 - a^2}{x}$, dal quale si rileva, che l'abscissa x sta ad $x + a$, come $x - a$ sta alla sottotangente cercata.

245.

245. Lo stesso valore $\frac{a^2 y^2}{c^2 x}$ della sottotangente si sarebbe trovato con prendere dall' equazione differenziata il valore di dy, che è $\frac{c^2 x dx}{a^2 y}$, e sostituirlo in sua vece nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, dalla quale sostituzione ne viene $\frac{ydx}{\frac{c^2 x dx}{a^2 y}} = \frac{a^2 y^2}{c^2 x}$, come prima.

246. Supponiamo adesso, che si voglia la sottotangente, che corrisponde a un tal dato punto dell'iperbola, la di cui abscissa x è $= a$. Si sostituisca in luogo di x questo suo valore a nell' espressione $\frac{x^2 - a^2}{x}$ della sottotangente, e ne verrà $\frac{a^2 - a^2}{a} = \frac{0}{a}$. Dunque la sottotangente, che compete al punto dell'iperbola, la di cui abscissa è $= a$, è infinitamente piccola, conseguentemente la tangente cade nel vertice dell'iperbola, lo che è ben evidente, poichè il punto, in cui si ha $x = a$, è il vertice dell'iperbola. Che se si vorrà la sottotangente, che compete a quel punto dell'iperbola, la di cui abscissa x è $= \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$, si sostituisca in luogo di x questo suo valore nell' espressione $\frac{x^2 - a^2}{x}$ della sottotangente, lo che fatto si avrà $\frac{a^2 + 2a^2\sqrt{5} + 5a^2 - 4a^2}{2 \times \overline{a + a\sqrt{5}}} = \frac{a^2 + a^2\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}} = a \times \frac{\overline{a + a\sqrt{5}}}{a + a\sqrt{5}} = a$; onde in questo caso la subtangente è eguale al semiasse transverso.

247. Si debba trovare il valore della subtangente dell' iperbola riferita agli asintoti, la di cui equazione è $a^2 = xy$. Si prenda la differenza di questa equazione, che è $0 = xdy + ydx$, dalla quale si deduce il valore di dx così

dx

Digitized by Google

$dx = -\frac{xdy}{y}$. Se ne faccia la fostituzione nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, lo che darà $-\frac{xdy}{y} \times \frac{y}{dy} = -x$, che è il cercato valore della fottotangente: Che però qualunque fia il punto dell'iperbola riferita agli afintoti, per cui fi vuole il valore della fottotangente, farà fempre quefta fottotangente eguale all'abfciffa.

248. Ma qui fi offervi, che nel primo efempio il valore della fottotangente fi è trovato pofitivo, e qui fi è trovato negativo. Ciò non altro vuol dire, fe non fe, che nel primo cafo la fottotangente cade verfo l'origine delle abfciffe x, e in quefto fecondo cafo ella cade dalla parte oppofta.

249 Propofto fia di trovare il valore della fottotangente della curva, la di cui equazione è $y = \frac{x^4 - 3ax^3 + a^3x + a^4}{-3x^3 + ax^2 + 2a^3}$. Si differenzi quefta equazione, e fi avrà

$$dy = \frac{\overline{4x^3dx - 9ax^2dx + a^3dx} \times \overline{-3x^3 + ax^2 + 2a^3} + \overline{9x^2dx - 2axdx} \times \overline{x^4 - 3ax^3 + a^3x + a^4}}{\overline{-3x^3 + ax^2 + 2a^3}^2},$$

che ridotta diventa

$$dy = -\frac{3x^6dx + 2ax^5dx - 3a^2x^4dx + 14a^3x^3dx - 10a^4x^2dx - 2a^5xdx + 2a^6dx}{9x^6 - 6ax^5 + a^2x^4 - 12a^3x^3 + 4a^4x^2 + 4a^6},$$

quale moltiplico per $\frac{x}{dx}$ a fine di avere il valore della fottotangente, e mi viene

$$\frac{xdy}{dx} = [A] - \frac{3x^7 + 2ax^6 - 3a^2x^5 + 14a^3x^4 - 10a^4x^3 - 2a^5x^2 + 2a^6x}{9x^6 - 6ax^5 + a^2x^4 - 12a^3x^3 + 4a^4x^2 + 4a^6},$$ che è il

cercato valore per un qualfifia punto della curva. Che fe fi vorrà il valore di quefta fottotangente per un determinato punto della curva, in tal cafo bifognerà nella efpreffione trovata foftituire in luogo di x il valore, che ha l'abfciffa corrifpondente al punto propofto: Come fe fi vorrà il valore della fottotangente, che compete al punto D, [Fig. 14.] perchè rifpetto a quefto punto D è $x = a$,

fi.

Digitized by Google

farà d' uopo sostituire a in luogo di x nell' espressione [A]. Ma mediante una tale sostituzione nasce il caso dell' Articolo X. del Capo preced., cioè si ha

$$\frac{x\,dy}{dx} = -\frac{3a^7+2a^7-3a^7+14a^7-10a^7-2a^7+2a^7}{9a^6-6a^6+a^6-12a^6+4a^6+4a^6} = \frac{0}{0},$$ lo che nulla lascia

sapere del vero valore della sottotangente. Per trovarlo adunque a norma del citato Articolo, sostituisco $a+dx$ in luogo di x tanto nel numeratore che nel denominatore dell' espressione [A], con che ritrovo

$$\begin{array}{l}
-3a^7-21a^6dx-63a^5\overline{dx}^2-105a^4\overline{dx}^3-105a^3\overline{dx}^4-63a^2\overline{dx}^5-21a\overline{dx}^6-3\overline{dx}^7\\
+2a^7+12a^6dx+30a^5\overline{dx}^2+40a^4\overline{dx}^3+30a^3\overline{dx}^4+12a^2\overline{dx}^5+2a\overline{dx}^6\\
-3a^7-15a^6dx-30a^5\overline{dx}^2-30a^4\overline{dx}^3-15a^3\overline{dx}^4-3a^2\overline{dx}^5\\
+14a^7+56a^6dx+84a^5\overline{dx}^2+56a^4\overline{dx}^3+14a^3\overline{dx}^4\\
-10a^7-30a^6dx-30a^5\overline{dx}^2-10a^4\overline{dx}^3\\
-2a^7-4a^6dx-2a^5\overline{dx}^2\\
+2a^7+2a^6dx\\
\hline
+9a^6+54a^5dx+135a^4\overline{dx}^2+180a^3\overline{dx}^3+135a^2\overline{dx}^4+54a\overline{dx}^5+9\overline{dx}^6\\
-6a^6-30a^5dx-60a^4\overline{dx}^2-60a^3\overline{dx}^3-30a^2\overline{dx}^4-6a\overline{dx}^5\\
+a^6+4a^5dx+6a^4\overline{dx}^2+4a^3\overline{dx}^3+a^2\overline{dx}^4\\
-12a^6-36a^5dx-36a^4\overline{dx}^2-12a^3\overline{dx}^3\\
+4a^6+8a^5dx+4a^4\overline{dx}^2\\
+4a^6
\end{array}$$

Di

Di queſto nuovo numeratore, e denominatore la prima, e la ſeconda colonna verticale viene diſtrutta dalla contrarietà de' ſegni; la terza nel numeratore ſi riduca a $-11a^5\overline{dx}^2$, e nel denominatore a $+49a^4\overline{dx}^2$: Quindi, perchè tutte le ſuſſeguenti colonne verticali riſpetto a queſte vanno a zero, ſi ha finalmente

$$\frac{xdy}{dx} = \frac{-11a^5\overline{dx}^2}{+49a^4\overline{dx}^2} = -\frac{11a}{49}$$, che è il cercato valore della ſottotangente.

250. Prenderò l'ultimo eſempio dall' equazion generale (B) $a'x^m + b'y^n + c'x^py^q + A = 0$, che ſerve per un gran numero di curve algebraiche. Per avere il valor generale della ſottotangente, differenzio l'equazione propoſta così $ma'x^{m-1}dx + nb'y^{n-1}dy + pc'y^qx^{p-1}dx + qc'x^py^{q-1}dy = 0$, o ſia $ma'x^{m-1}dx + pc'y^qx^{p-1}dx = -nb'y^{n-1}dy - qc'x^py^{q-1}dy$; da cui ricavo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-nb'y^{n-1} - qc'x^py^{q-1}}{ma'x^{m-1} + pc'y^qx^{p-1}}$$; onde moltiplicandola per y, ho finalmente il valore della ſottotangente, che è

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{-nb'y^n - qc'x^py^q}{ma'x^{m-1} + pc'y^qx^{p-1}} \quad (D).$$

251. Per vedere come nei caſi particolari ſi debba ſervire di queſta formola generale, ne farò brevemente l'applicazione: E primieramente ſi debba trovare la ſottotangente nella parabola apolloniana, la di cui equazione è $y^2 - ax = 0$. Paragonando queſta equazione coll' equazione (B), ſi trova $y^2 = b'y^n$, e $-ax = a'x^m$, donde ſi deduce $b' = 1$, $-n = -2$, $a' = -a$, $m = 1$, $c' = 0$, $p = 0$, $q = 0$, $A = 0$. Con fare la ſoſtituzione di queſti valori nella formola (D), eſſa ſi muta nella ſeguente $\frac{ydx}{ay} = \frac{-2y^2}{-a} = 2x$ (con ſoſtituire ax in luogo di y^2), che è il valore della ſottotangente nella parabola del primo genere. Per trovare il valore della ſottotangente nella parabola del ſecondo genere, la di cui equazione è $y^3 - a^2x = 0$, ſi faccia l'accennato paragone coll' equazione (B), e ſi avrà $a'x^m = -a^2x$, $b'y^n = y^3$, d'onde ſi ricava $a' = -a^2$, $m = 1$, $b' = 1$, $n = 3$, $c' = 0$, $p = 0$, $q = 0$, $A = 0$; che però facendo le opportune ſoſtituzioni nella formola (D), ſi trova

$\frac{ydx}{dy} = \frac{-3y^3}{-a^2} = 3x$ (con ſoſtituire a^2x in luogo di y^3), che è il valore della

la sottotangente nella parabola del secondo genere. Parimente per trovare il valore della sottotangente nella parabola del terzo genere, la di cui equazione è $y^4 - a^3 x = 0$ si paragoneranno i termini di questa equazione con quelli dell' equazione (B), a fine di avere $a' = -a^3$, $m = 1$, $b' = 1$, $n = 4$, $c' = 0$, $p = 0$, $q = 0$, $A = 0$. Colla sostituzione di questi valori la formola (D) diventa

$\frac{ydx}{dy} = \frac{-4y^4}{-a^3} = 4x$ (con sostituire $a^3 x$ in luogo di y^4), che è il valore della sottotangente nella parabola del terzo genere. Cerchiamo per ultimo il valore della sottotangente nell' elisse del primo genere, la di cui equazione è $c^2x^2 + a^2y^2 - a^2c^2 = 0$. Si faccia il solito paragone, e si avrà $a'x^m = c^2x^2$, $b'y^n = a^2y^2$, $a' = c^2$, $m = 2$, $b' = a^2$, $n = 2$, $c' = 0$, $p = 0$ ec.. Si sostituiscano questi valori nella espressione (D), che diverrà

$\frac{ydx}{dy} = \frac{-2a^2y^2}{2c^2x} = \frac{-a^2+x^2}{x}$ (con sostituire $a^2c^2 - c^2x^2$ in luogo di a^2y^2), che è il cercato valore della sottotangente nell' elisse del primo genere: Adunque come l' abscissa x sta ad $x+a$, così $x-a$ sta alla sottotangente. Se si vorrà la sottotangente per quel punto dell' elisse, cui corrisponde l' abscissa $x = 0$, si sostituisca o in luogo di x nella trovata espressione $\frac{-a^2+x^2}{x}$, con che essa diverrà $\frac{-a^2}{0}$; che è un valore infinito. La sottotangente adunque, che compete al proposto punto è infinita, lo che dimostra, che la tangente del detto punto è parallela all' asse delle abscisse, come costa dall' osservare, che tale punto è all' estremità dell' asse conjugato.

252. Allorchè la sottotangente si prende su l' asse delle abscisse serve la formola generale già trovata $\frac{ydx}{dy}$, ma se la detta sottotangente si vorrà prendere su l' asse delle ordinate, in tal caso la di lei formola generale sarà $\frac{xdy}{dx}$: Poichè sia AMB (*Fig.* 15.), la curva proposta, e TE la di lei tangente nel punto M, AP l' asse delle abscisse x, AN quello delle ordinate y; siccome la tangente non solo taglia in T l' asse delle abscisse, ma ancora in t l' asse delle ordinate, così la sottotangente presa su l' asse delle abscisse è PT, presa su l' asse delle ordinate è Nt: Ma

Ma il triangolo tMN è simile al triangolo MQm, quindi si ha $Qm : QM :: MN : Nt$, o sia in termini analitici $dx : dy :: x : Nt$ (stante che $Qm = Mq = Pp = dx$, $MQ = dy$, $NM = AP = x$), e però $Nt = \frac{xdy}{dx}$, che è la formola generale della sottotangente presa su l'asse delle ordinate.

253. Abbondantemente abbiamo parlato della sottotangente, la quale serve a determinare la posizione della tangente: Ma se oltre il saperne la di lei posizione, si vorrà conoscere ancora il suo valore, bisognerà istituirne a parte il calcolo. Cerchiamo adunque qual sia la formola generale esprimente il valore della tangente. A ritrovarla servono gli stessi triangoli MNm, MPA (*Fig.* 12.), che hanno servito a trovare la formola della sottotangente. Poichè il triangolo MNm è rettangolo in N, si ha Mm (che è l'arco infinitesimo di curva coincidente colla tangente) $= \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{Nm}^2}$, o sia $Mm = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Ora dai due triangoli simili MNm, MPA si ricava $Nm : Mm :: MP : MA$, cioè in termini analitici $dy : \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} :: y : MA$, e però

$$MA = \frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy} \quad \text{(E)},$$ che è la cercata espression generale della tangente.

254. Mediante questa formola generale, e l'equazione della curva, della di cui tangente si vuol determinare il valore, si otterrà questo cercato valore con differenziare primieramente l'equazione proposta, indi dedurne i valori di dy, e $\overline{dy}^2$ da sostituirsi nella formola [E], con che spariranno dalla medesima i differenziali, nè più conterrà, che quantità finite, che daranno il cercato valore della tangente.

255. Vediamone primieramente l'esempio nella parabola del primo genere, la di cui equazione è $y^2 - ax = 0$. Essa si differenzi, e si avrà $2ydy - adx = 0$, da cui si ricava $dy = \frac{adx}{2y}$, e $\overline{dy}^2 = \frac{a^2\overline{dx}^2}{4y^2}$. Si sostituiscano questi valori nella formola [E], ed essa si cambierà in

$y\sqrt{}$

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \frac{a^2\,\overline{ax}^2}{4y^2}}}{\frac{adx}{2y}} = \frac{y^2 dx\sqrt{4y^2 + a^2}}{adx} = \frac{y\sqrt{4y^2 + a^2}}{a}.$$ Quì si sostituisca il valore di y preso dall'equazione $y^2 - ax = 0$, che è $= \sqrt{ax}$, e il valore di $y^2 = ax$, e ne verrà $\frac{\sqrt{ax}\ \sqrt{4ax + a^2}}{a} = \frac{\sqrt{4a^2x^2 + a^3x}}{a} = \frac{a\sqrt{4x^2 + ax}}{a} = \sqrt{4x^2 + ax}$, che è il cercato valore della tangente nella parabola del primo genere. Ma perchè $\sqrt{4x^2 + ax} = \sqrt{\overline{4x + a} \times x}$, la tangente perciò della parabola del primo genere è una media proporzionale tra l'abscissa, e il parametro aumentato del quadruplo dell'abscissa.

256. Desumerò il secondo esempio dall'equazione generale [B] $a'x^m + b'y^n + c'x^py^q + A = 0$ del precedente num. 250. Si differenzi questa equazione, e si avrà $ma'x^{m-1}dx + nb'y^{n-1}dy + pc'y^qx^{p-1}dx + qc'x^py^{q-1}dy = 0$, da cui si prenda il valore di dy, che è $= \frac{ma'x^{m-1}dx + pc'y^qx^{p-1}dx}{-nb'y^{n-1} - qc'x^py^{q-1}}$, conseguentemente si ha

$$\overline{dy}^2 = \frac{(ma'x^{m-1}dx + pc'y^qx^{p-1}dx)^2}{(-nb'y^{n-1} - qc'x^py^{q-1})^2} =$$

$$\frac{m^2a'^2x^{2m-2}\,\overline{dx}^2 + 2mpa'c'y^qx^{m+p-2}\,\overline{dx}^2 + p^2c'^2y^{2q}x^{2p-2}\,\overline{dx}^2}{n^2b'^2y^{2n-2} + 2nqb'c'x^py^{n+q-2} + q^2c'^2x^{2p}y^{2q-2}}$$

 Si

Digitized by Google

Si sostituiscano adesso questi valori di dy, e $\overline{dy}^2$ nella formola generale

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy}$$ esprimente il valore della tangente, e ne verrà

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \dfrac{m^2a'^2x^{2m-2}\,\overline{dx}^2 + 2mpa'c'y^qx^{m+p-2}\,\overline{dx}^2 + p^2c'^2y^{2q}x^{2p-2}\,\overline{dx}^2}{n^2b'^2y^{2n-2} + 2nqb'c'x^py^{n+q-2} + q^2c'^2x^{2p}y^{2q-2}}}}{\dfrac{ma'x^{m-1}dx + pc'y^qx^{p-1}dx}{-nb'y^{n-1} - qc'x^py^{q-1}}} =$$

$$\left\{\frac{\dfrac{ydx}{nb'y^{n-1} + qc'x^py^{q-1}}}{dx \times \dfrac{ma'x^{m-1} + pc'y^qx^{p-1}}{-nb'y^{n-1} - qc'x^py^{q-1}}}\right\} \times \sqrt{\left(n^2b'^2y^{2n-2} + 2nqb'c'x^py^{n+q-2} + \right.}$$

$$\left. q^2c'^2x^{2p}y^{2q-2} + m^2a'^2x^{2m-2} + 2mpa'c'y^qx^{m+p-2} + p^2c'^2y^{2q}x^{2p-2}\right),$$

e finalmente

$$\frac{-y}{ma'x^{m-1} + pc'y^qx^{p-1}} \times \sqrt{\left(n^2b'^2y^{2n-2} + 2nqb'c'x^py^{n+q-2} + q^2c'^2x^{2p}y^{2q-2}\right.}$$

$$\left. + m^2a'^2x^{2m-2} + 2mpa'c'y^qx^{m+p-2} + p^2c'^2y^{2q}x^{2p-2}\right)$$

che è la formola generale del valore della tangente per tutte quelle curve, le di cui equazioni sono comprese nell' equazione generale (B).

257. Per vedere l'uso di questa formola, facciamone l' applicazione ad alcuni casi particolari, e quantunque poc'anzi al num. 255. abbiamo trovato il valore della tangente nella parabola del primo genere, ricerchiamolo di nuovo mediante questa formola, a fin di vedere, come in un subito si ottenga quanto si cerca. Si paragonino i termini dell' equazione $y^2 - ax = 0$ della parabola con quelli dell'equazion generale (B), e si avrà $y^2 = b'y^n$, $-ax = a'x^m$, onde $a' = -a$; $m=1$, $b'=1$, $n=2$, $c=0$, $p=0$, $q=0$. Si sostituiscano adesso questi valori nella formola generale esprimente il valore della tangente, e ne verrà

— y

$\frac{-y\sqrt{4y^2+a^2}}{-a}$, che è lo stesso valore trovato al num. 255.

258. Si debba trovare in secondo luogo il valore della tangente nell' iperbola del primo genere, la di cui equazione è $a^2y^2 - c^2x^2 + a^2c^2 = 0$. Si faccia il solito paragone coll'equazione (B), e si avrà $a^2y^2 = b'y^n$, $-c^2x^2 = a'x^m$, onde $b' = a^2$, $a' = -c^2$, $m = 2$, $n = 2$, $c = 0$. $p = 0$, $q = 0$. Si sostituiscano questi valori nella formola generale della tangente, con che diverrà

$\frac{-y\sqrt{4a^4y^2 + 4c^4x^2}}{-2c^2x} = \frac{y\sqrt{a^4y^2 + c^4x^2}}{c^2x}$, in cui sostituendo il valore di

y, e di y^2 preso dall' equazione $a^2y^2 - c^2x^2 + a^2c^2 = 0$, si ha finalmente

$\frac{\sqrt{x^2 - a^2}\sqrt{a^2x^2 - a^4 + c^2x^2}}{ax}$, che è la tangente cercata.

259. Cerchiamo in terzo luogo il valore della tangente nel circolo, la di cui equazione è $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Si faccia il solito paragone, e si avrà $a'x^m = x^2$, $b'y^n = y^2$, onde $a' = 1$, $b' = 1$, $m = 2$, $n = 2$, $c = 0$, $p = 0$, $q = 0$. Si sostituiscano questi valori nella formola generale della tangente, ed essa si cambierà in $\frac{-y\sqrt{4y^2+4x^2}}{2x} = \frac{-y\sqrt{y^2 + x^2}}{x} =$ (con sostituire a^2 in luogo di

$y^2 + x^2$, cui è eguale, come costa dall' equazione data)

$\frac{-y\sqrt{a^2}}{x} = \frac{-ay}{x}$ = (con sostituire $\sqrt{a^2 - x^2}$ in luogo di y)

$\frac{-a}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$, che è il cercato valore della tangente nel circolo.

260. Data l'equazione della curva sarà facil cosa il determinar l'angolo, che fa la tangente con l'asse delle absciffe. Egli è noto, che dato un' angolo, è data la ragione del suo seno, al coseno: Ora dell' angolo PAM [*Fig.* 12.], che fa la tangente AM coll'asse delle absciffe AP, il seno è PM, e il coseno è AP, e a motivo dei triangoli simili MN*m*, MPA, la ragione di MP a PA ci viene espressa da

m N

mN ad NM, vale a dire da dy a dx: Dunque se si differenzierà l'equazion data, indi si ritrovi la ragione di dy a dx, si otterrà la ragione del seno al coseno dell'angolo, che fa la tangente con l'asse delle abscisse, e in conseguenza si farà noto l'angolo stesso. Si voglia per esempio trovar la ragione del seno al coseno dell'angolo, che nel circolo fa la tangente con l'asse delle abscisse. Si prenda l'equazione al circolo, che è $2ax - x^2 = y^2$, quale si differenzi, e si avrà $adx - xdx$

$= ydy$, dalla quale si deduce $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$, che è la ragione cercata: Onde generalmente nel circolo il seno dell'angolo, che fa la tangente con l'asse delle abscisse, sta al suo coseno, come $a - x$ sta a y. Di fatto al punto C del circolo GCF [*Fig.* I.] si conduca la tangente BC: Sarà CBE l'angolo fatto dalla tangente coll'asse delle abscisse, del qual angolo il seno è CE, e il coseno è BE: La CE è $= y$, e la EP $= a - x$: Ma i due triangoli PEC, CBE essendo simili, si ha PE ($= a - x$): EC ($= y$) :: EC: BE; dunque la ragione, che il seno dell'angolo fatto dalla tangente coll'asse delle abscisse ha al coseno ottimamente viene espressa

da $\frac{a-x}{y}$.

261. Prenderò il secondo esempio dalla curva A B C D (*Fig.* II.), la di cui equazione (pel num. 169.) è $l.\, y = - x \times 0.5772156649 +$

$$\begin{array}{ccccccccc} x + & & + \frac{1}{2}x & & + \frac{1}{3}x & & + \frac{1}{4}x & & + \text{ec.} \\ - l.\overline{1+x} & & - l.\overline{1+\frac{1}{2}x} & & - l.\overline{1+\frac{1}{3}x} & & - l.\overline{1+\frac{1}{4}x} & & - \text{ec.} \end{array}$$

Poichè il triangoletto differenziale è rettangolo (suppongo che le ordinate siano normali all'asse), si ha la seguente proporzione; come sta il raggio alla tangente, così sta $d\,x$ a $d\,y$, cioè (con fare il raggio $= 1$), 1 : Tang. :: $d\,x$: $d\,y$, e però

$\frac{d\,y}{d\,x} =$ Tang. Basta adunque trovare il valore della ragione $\frac{d\,y}{d\,x}$ per avere l'espressione della tangente dell'angolo, che deve fare la tangente della curva coll'asse delle abscisse, e in conseguenza conoscere la quantità di quest'angolo. Il valore poi

della

della ragione $\frac{dy}{dx}$ si ottiene col solo differenziare l'equazione della curva. Così

volendosi determinar l'angolo, che fa coll'asse EF delle abscisse la tangente condotta al punto 2 della curva, il qual punto corrisponde all'abscissa $x = 2$, si differenzi l'equazione data, e si avrà

$$\frac{dy}{y} = dx \left\{ \begin{array}{l} -0.5772156649+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{ec.} \\ \\ \qquad -\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}-\frac{1}{4+x}-\text{ec.} \end{array} \right\}$$

da cui si ricava (A)

$$\frac{dy}{dx} = y \left\{ \begin{array}{l} -0.5772156649+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{ec.} \\ \\ \qquad -\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}-\frac{1}{4+x}-\text{ec.} \end{array} \right\}$$

Trattandosi pertanto della tangente, che compete al punto della curva corrispondente all'abscissa $x = 2$, nell'equazione (A) si sostituisca 2 in luogo di x, e con

ciò essa si cambierà nella seguente $\frac{dy}{dx} = y \times \overline{-0.5772156649 + 1 + \frac{1}{2}}$

$= 2 \times \overline{-0.5772156649 + 1 + \frac{1}{2}}$ (mentre è 2 il valore dell'ordinata y

che compete all'abscissa $x = 2$) $= -1.1544313298 + 3$. Sottraendosi adunque 1.1544313298 da 3.0000000000, ne viene 1.8455586702, che è il cerca-

to valore di $\frac{dy}{dx}$. Si cerchi nelle Tavole delle funzioni del circolo anneſſe al Tomo III. la tangente 1. 8455686702, cui ſi troverà corriſpondere l'angolo 61° 33': Che però ſe dal punto dato 2 ſi condurrà la retta 2 K, che faccia coll' aſſe E F un angolo di 61°. 33', eſſa ſarà la tangente cercata. Iſteſſamente ſe ſi vorrà la poſizione della tangente, che compete al punto b della curva; poichè l' abſciſſa corriſpondente al punto b è $x=0$, ſi ſoſtituiſca zero in luogo di x nell' equazione (A), e con ciò eſſa diverrà $\frac{dy}{dx} = y \times \overline{-0.\ 5772156649} = -0.\ 5772156649$, perchè riſpetto all' abſciſſa $x=0$ è $y=1$. Ora nelle Tavole ſi trova, che a $-0.\ 5772156649$ corriſponde un angolo di 29°. 59' 39'', dunque tale è l'angolo, che deve fare la tangente ba coll' aſſe E F delle abſciſſe, la quale ha una poſizione oppoſta alla tangente antecedentemente trovata, perchè il di lei valore è negativo.

Baſta poi oſſervare l'equazione (A) per rilevare, che, ſe il valore di x ſarà un numero intero negativo, la formola $\frac{dy}{dx}$ diventa infinita; di fatto ſe ſi ſoſtituirà -1 in luogo di x, l'equazione [A] diverrà

$$\frac{dy}{dx} = y \times \overline{-0.\ 5772156649 - \frac{1}{0}},$$

ſe poi ſarà qualunque altro numero intero negativo, l' equazione [A] ſi cambierà in

$$\frac{dy}{dx} = y \times \overline{-0.\ 5772156649 + 1 - \frac{1}{0}}.$$

262. Succede alle volte, che col determinare il punto, per cui ſi vuol la tangente, e però col ſoſtituire nel rapporto di dy a dx un certo valore in luogo della variabile, o delle variabili, ne riſulta $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Ogniqualvolta ciò ſuccede, egli è ſegno, che il punto propoſto è un punto moltiplice, cui competono altrettan-

Digitized by Google

tante tangenti, quanti ivi sono gli intersecantisi rami della curva, e però quanti sono i rapporti di dy a dx da determinarsi come segue, mediante cioè il metodo dell'Art. X. Sia data la curva QADMAbdAG (*Fig.* 17.), il di cui asse delle abscisse x è SP, e quello delle ordinate è BC. Il punto A è l'origine delle coordinate, e la di lei equazione è $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$. Si debba determinare il rapporto del seno al coseno dell'angolo, che la tangente del punto A fa con l'asse delle abscisse. Si differenzi l'equazione $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$, e si avrà $4x^3dx - 2ayxdx - ax^2dy + 3by^2dy = 0$, dalla quale si ottiene $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 2ayx}{ax^2 - 3by^2}$. Ma perchè al punto A, pel quale si vuol la tangente, è $x = 0$, $y = 0$, con sostituire questi valori, l'equazione diventa $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, lo che nulla ci lascia sapere del vero rapporto di dy a dx.

Per ritrovarlo adunque si sostituisca nell'equazione proposta $0 + dx$ in luogo di x, e $0 + dy$ in luogo di y, o sia dx in vece di x, e dy in vece di y, e con ciò ne verrà $\overline{dx}^4 - ady\,\overline{dx}^2 + b\,\overline{dy}^3 = 0$, che si riduce a $-ady\,\overline{dx}^2 + b\overline{dy}^3 = 0$ (a motivo che $\overline{dx}^4$ va a zero al confronto degli altri due termini), da cui si ricava $dy = 0$, e $\frac{\overline{dy}^2}{dx^2} = \frac{a}{b}$, e però $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Tre adunque sono i rapporti di dy a dx, cioè $dy = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, conseguentemente tre sono le tangenti, che competono al punto A: Una infinita espressa da $dy = 0$, che si confonde con l'asse SP; la seconda AX espressa da $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, che si ha con prendere una qualunque AR, indi condurre la nor-

male RX, così che sia RX: RA:: $\sqrt{a}:\sqrt{b}$; e la terza TA espressa da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

, la quale si trova con prendere la AR, poscia alzar la normale RT, onde sia RT: RA:: $-\sqrt{a}:\sqrt{b}$. Un' altro esempio renderà sempre più famigliare la maniera d'operare in questi casi. Data l'equazione $y^4 - 4ay^3\sqrt{2} + 8a^2y^2 - 2x^2y^2 + 4ax^2y\sqrt{2} + 6axy^2 - 12a^2xy\sqrt{2} + 2x^4 - 10ax^3 + 14a^2x^2 - 2a^3x = 0$ della curva ALEKHEGFMENA (*Fig.* 16.) si debba determinare la tangente, che le compete al punto E, rispetto al quale è l'abscissa AD$=a$, e l'ordinata DE$=a\sqrt{2}$. Si differenzi l'equazione data, indi dalla medesima si deduca la ragione di dy a dx, lo che fatto si avrà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4xy^2 - 8axy\sqrt{2} - 6ay^2 + 12a^2y\sqrt{2} - 8x^3 + 30ax^2 - 28a^2x + 2a^3}{4y^3 - 12ay^2\sqrt{2} + 16a^2y - 4x^2y + 4ax^2\sqrt{2} + 12axy - 12a^2x\sqrt{2}},$$

in cui si sostituisca a in luogo di x, ed $a\sqrt{2}$ in vece di y, e da tale sostituzione ne risulterà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8a^3 - 16a^3 - 12a^3 + 24a^3 - 8a^3 + 30a^3 - 28a^3 + 2a^3}{8a^3\sqrt{2} - 24a^3\sqrt{2} + 16a^3\sqrt{2} - 4a^3\sqrt{2} + 4a^3\sqrt{2} + 12a^3\sqrt{2} - 12a^3\sqrt{2}}, = \frac{0}{0},$$

lo che nulla lascia sapere del rapporto cercato di dy a dx. Per ritrovarlo si sostituisca nell' equazione proposta $a+dx$ in luogo di x, ed $a\sqrt{2}+dy$ in vece di y, e con ciò si avrà

$$\left.\begin{aligned}
+y^4 &= +4a^4+8a^3dy\sqrt{2}+12a^2\overline{dy}^2+4a\overline{dy}^3\sqrt{2}+\overline{dy}^4\\
-4ay^3\sqrt{2} &= -16a^4-24a^3dy\sqrt{2}-24a^2\overline{dy}^2-4a\overline{dy}^3\sqrt{2}\\
+8a^2y^2 &= +16a^4+16a^3dy\sqrt{2}+8a^2\overline{dy}^2\\
-2x^2y^2 &= -4a^4-4a^3dy\sqrt{2}-8a^2dxdy\sqrt{2}-4a\overline{dx}^2dy\sqrt{2}-2\overline{dx}^2\overline{dy}^2\\
&\quad -8a^3dx-4a^2\overline{dx}^2-4adx\overline{dy}^2\\
&\quad -2a^2\overline{dy}^2\\
+4ax^2y\sqrt{2} &= 8a^4+4a^3dy\sqrt{2}+8a^2dxdy\sqrt{2}+4a\overline{dx}^2dy\sqrt{1}\\
&\quad +16a^3dx+8a^2\overline{dx}^2\\
+6axy^2 &= +12a^4+12a^3dy\sqrt{2}+6a^2\overline{dy}^2+6adx\overline{dy}^2\\
&\quad +12a^3dx+12a^2dxdy\sqrt{2}\\
-12a^2xy\sqrt{2} &= -24a^4-24a^3dx-12a^2dxdy\sqrt{2}\\
&\quad -12a^3dy\sqrt{2}\\
+2x^4 &= +2a^4+8a^3dx+12a^2\overline{dx}^2+8a\overline{dx}^3+2\overline{dx}^4\\
-10ax^3 &= -10a^4-30a^3dx-30a^2\overline{dx}^2-10a\overline{dx}^3\\
+14a^2x^2 &= +14a^4+28a^3dx+14a^2\overline{dx}^2\\
-2a^3x &= -2a^4-2a^3dx
\end{aligned}\right\}=0$$

Ora i termini della prima, ſeconda, e terza colonna vengono diſtrutti dalla contrarietà de' ſegni, e i termini della quarta colonna ſi riducono a $2adx\overline{dy}^2 - 2a\overline{dx}^3$, che eguaglio a zero così $2adx\overline{dy}^2 - 2a\overline{dx}^3 = 0$, perchè a loro confronto vanno a zero i termini della quarta colonna. Dall'equazione pertanto $2adx\overline{dy}^2 - 2a\overline{dx}^3 = 0$ ſi ricava $dx = 0$, e $dy = \pm dx$. Il primo valore $dx = 0$

 ſa

fa vedere, che una tangente è DER parallela all'asse AB delle ordinate, e gli altri due valori $dy = dx$, $dy = -dx$ fanno vedere, che vi sono altre due tangenti, che tagliano per metà l'angolo delle coordinate: Che però se si prenderà DC = DP = DE, indi pei punti C, E si conduca la retta CS, e pei punti P, E la retta PQ, queste due rette CS, PQ saranno le altre due tangenti che colla DR competono al punto triplice E. Poichè dal rapporto di dy a dx viene determinata la posizione della tangente, poniamo $dy : dx :: \omega : \varphi$, e osserviamo, che ω, φ possono essere o due quantità finite, o una di loro può essere eguale a zero, o pure possono essere eguali a zero tutte due. Se amendue saranno eguali a zero, la cosa si ridurrà al caso pur ora trattato: Se ω, φ saranno due quantità finite, mediante la loro ragione si determinerà la posizione della tangente: Che se sarà $\omega = 0$, anche dy sarà $= 0$, e però la ragione di dy a dx sarà minore di qualunque assegnabile, conseguentemente questo rapporto di o a dx indicherà, che la tangente cercata è parallela all'asse delle abscisse: *vice versa* se sarà $\varphi = 0$, sarà anche $dx = 0$, vale a dire la ragione di dx a dy sarà minore di qualunque assegnabile, e questo rapporto dy: o esprimerà, che la tangente cercata è parallela all'asse delle ordinate.

263. Se le ordinate alla curva non saranno perpendicolari al diametro AQ (*Fig.* 13.) ma facciano un angolo qualunque APM, che chiamo $= \varphi$, in tal caso vi sarà qualche varietà nella formola esprimente il valore della tangente perchè varia il valore dell' archetto infinitesimo

$Mm = \sqrt{\overline{dx}^2 + 2\,dx\,dy \text{ Cos. } \varphi + \overline{dy}^2}$, poichè [pel num. 279. della Geom. piana Tomo III.] $Mm = \sqrt{\overline{MN}^2 + 2\,MN \times NB + \overline{Nm}^2}$ ed essendo $MN = dx$, $Nm = dy$, il valore di NB si trova essere dy Cos φ stante la proporzione $1 : \text{Cos. } \varphi :: Nm\ [= dy] : NB$ [si prende il raggio $= 1$.],

onde $\sqrt{\overline{MN}^2 + 2\,MN \times NB + \overline{Nm}^2} =$

$\sqrt{\overline{dx}^2 + 2\,dx\,dy \text{ Cos. } \varphi + \overline{dy}^2}$. Essendo poi simili i due triangoli MNm, MPT, si ha Nm [$= dy$]: Mm

$[= \sqrt{\overline{dx}^2 + 2\,dx\,dy \text{ Cos. } \varphi + \overline{dy}^2}\ ] :: MP\ [= y : MT$

(=y

$$(= \frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + 2\,dx\,dy\,\text{Cos}.\,\varphi + \overline{dy}^2}}{dx}$$), che è la formola generale esprimente il cercato valore della tangente. Nei casi particolari per trovare il valore della tangente di una proposta curva, si prevale di questa formola, come si è fatto di quella del num. 253.

264. Le ritrovate formole della tangente, e sottotangente delle curve riferite all' asse servono egualmente per la tangente, e sottotangente delle curve riferite al foco. Sia AMB [Fig. 18.] la curva riferita al foco G, e sia M il punto della curva, cui vuolsi condur la tangente. A questo punto M si tiri l' ordinata GM, perpendicolare alla quale nel punto G si inalzi la GT, che incontrerà la tangente TM nel punto T. All' ordinata GM si conduca infinitamente prossima la Gm, indi fatto centro in G si descriva col raggio GM l' archetto infinitesimo MN, il quale a motivo dell' infinita sua piccolezza si considera (giusta il num 21. 3°) come una retta perpendicolare all' ordinata Gm. Fatto ciò si trovano simili i due triangoli MNm, MGT, poichè gli angoli TGM, MNm sono retti, e l' angolo TMG non differisce dall' angolo MmN, che per l' angolo GmH infinitesimo, poichè eguale all' angolo MGm stante il parallelismo (che suppongo per costruzione) delle GM, Hm. Dalla similitudine pertanto dei due triangoli MNm, MGT si ricava mN : NM : : MG : GT, o sia $dy : dx : : y : \text{GT} = \frac{ydx}{dy}$, che è la formola generale della sottotangente : Parimente la similitudine de' detti triangoli dà mN : Mm : : MG : MT vale a dire in termini analitici

$$dy : \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} : : y : \text{MT} = \frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy}$$, che è la formola generale esprimente il valore della tangente.

265. Nelle curve riferite al foco il diametro è un' arco di cerchio descritto con un raggio ad arbitrio, il di cui centro è lo stesso foco ; onde è, che si è preso MN $= dx$; in quanto che MN è l' elemento del diametro, qualunque sia il raggio, con cui viene descritto: Come se il raggio sarà Ge, il di cui elemento è ea, pure in suo luogo si assume senza errore l' archetto MN, perchè essendo infinitamente prossime le due ordinate GM, Gm, uno non differisce dall' altro. Ed ecco tutta la differenza nelle formole della tangente, e sottotangente delle curve o riferite a un diametro, o riferite al foco, che nelle curve riferite a un diametro la dx è l' elemento di una retta, laddove nelle curve riferite al foco, essa è l' elemento di una quantità trascendente, vale a dire di un' arco di cerchio.

266. Data essendo pertanto l' equazione di una curva riferita al foco, la quale equazione rinchiuderà il rapporto delle GM, MN, Mm, cioè y, dx, dy, si rica-

Google

ricavi dalla medesima il valore di dx, o di dy, e questo valore si sostituisca nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$ della sottotangente, e con ciò si avrà l'espressione del valore della sottotangente della curva proposta: Se poi si vorrà il valore della tangente, bisognerà dedurre dall' equazion della curva il valore di dy, e $\overline{dy}^2$, indi sostituirlo nella formola generale $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dy}$. Ne vedremo l'esempio dopo avere parlato ancora delle curve trascendenti.

267. Quanto al modo di determinare il valore della tangente, e sottotangente nelle curve trascendenti riferite all' asse nulla di più debbo aggiungere a quanto ho detto fin' ora Gli esempj lo faranno vedere, Si debba trovare il valore della sottotangente nella logaritmica: Prima di tutto però cerchiamone la sua equazione. Tra gli asintoti AD, AS [Fig. 13.] sia descritta l'iperbola equilatera ECT, e prendendo le abscisse $=y$ su l' asintoto AS, e le ordinate $=u$ su l' asintoto AD, l' equazione della medesima riferita all' asintoto sarà $uy=a^2$ [pel num. 321. Tomo IV.], onde il valore dell' ordinata u dell' iperbola è $u=\frac{a^2}{y}$. A norma del num XCV. Tomo IV. si descriva la logaritmica $eGKV$, il di cui asse delle ordinate y sia l' asintoto AS, e l' asse delle abscisse x sia DAZ, intendendo, che il punto A ne sia l' origine. Poichè la proprietà della logaritmica è, che le di lei abscisse PI, NK, QL ec. moltiplicate in una quantità costante m diano prodotti eguali ai corrispondenti spazj iperbolici, egli è evidente, che se si prenderà l' elemento d' uno di questi spazj, come $QRrq$, che risulta dal prodotto dell' ordinata $QR=u=\frac{a^2}{y}$ nell' elemento dell' abscissa y, cioè è $QRrq=\frac{a^2dy}{y}$, sarà questo elemento eguale al prodotto della costante m nell' elemento della corrispondente abscissa $QL=x$ della logaritmica che è La; conseguentemente l' equazione differenziale della logaritmica è $\frac{a^2dy}{y}=mdx$. Questa equazione si poteva ancora dedurre immediatamente da quest' altra $x=l.y$, la quale differenziata diventa $dx=\frac{sdy}{y}$, che è l' equazione alla logaritmica, la di cui subtangente è $=s$: Ora aven-

avendosi l' equazione della logaritmica, si troverà il valore della di lei sottotangente, con prendere da questa equazione il valore di dx indi sostituirlo nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$ della sottotangente: Ma il valore di dx preso dalla precedente equazione è $= \frac{a^2dy}{my}$; facendo adunque l' accennata sostituzione, si avrà $\frac{y}{dy} \times \frac{a^2dy}{my} = \frac{a^2}{m}$, che è il cercato valore della sottotangente della logaritmica. E però nella logaritmica la sottotangente è costante, essendo eguale alla potenza dell' iperbola divisa per quella quantità, che moltiplica le abscisse della logaritmica a fine di dare i prodotti eguali ai corrispondenti spazj iperbolici.

268. Cerchiamo adesso il valore della tangente della stessa logaritmica. Si prenda dalla di lei equazione il valore di dy, che è $dy = \frac{mydx}{a^2}$, e però $\overline{dy}^2 = \frac{m^2y^2\overline{dx}^2}{a^4}$. Nella formola generale $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy}$ della tangente si sostituiscano questi valori di dy, e $\overline{dy}^2$, con che essa diverrà

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \frac{m^2y^2\overline{dx}^2}{a^4}}}{\frac{mydx}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^4 + m^2y^2}}{ma}.$$

269. Prendiamo il secondo esempio dalle spirali. Abbiamo veduto al num. 746. Tomo IV., che l' equazione generale alle infinite spirali paraboliche è $y^q p^n = r^q z^n$ [ho fatto $m + n = q$]. Si differenzi questa equazione, e si avrà $qp^n y^{q-1} dy = nr^q z^{n-1} dz$, da cui si ricava $dz = \frac{qp^n y^{q-1} dy}{nr^q z^{n-1}}$: Ma dalla

stes-

stessa equazione si ha $z^n = \frac{y^q p^n}{r^q}$, e $z = \frac{y^{\frac{q}{n}} p}{r^{\frac{q}{n}}}$, onde $\frac{z^n}{z} = z^{n-1} =$

$$\frac{\frac{y^q p^n}{r^q}}{\frac{y^{\frac{q}{n}} p}{r^{\frac{q}{n}}}} = p^{n-1}\, r^{\frac{q-nq}{n}}\, y^{\frac{nq-q}{n}}$$. Che se si sostituirà questo valore

di z^{n-1} nella precedente equazione $dz = \frac{q p^n y^{q-1} dy}{n r^q z^{n-1}}$, ne verrà

$$dz = \frac{q p^n y^{q-1} dy}{n r^q \times p^{n-1}\, r^{\frac{q-nq}{n}}\, y^{\frac{nq-q}{n}}} = \frac{q\, p\, y^{\frac{q-n}{n}}\, dy}{n r^{\frac{q}{n}}}$$. Posto ciò sia ARVNLC

[Fig. 20.] la spirale, e il circolo generatore AZPHD, il di cui raggio è $CA = r$, e la periferia $= p$. Si prenda nella di lui periferia una qualunque abscissa $AZ = z$, e dal centro C si conducano i raggi infinitamente prossimi CZ, CX, che intersecano la spirale in R, s. Col centro C, e col raggio $CR = y$ si descriva l'archetto infinitesimo Ru, che sarà concentrico all' arco ZX, siccome pure al medesimo sarà concentrico l'archetto sQ descritto col raggio Cs. Stante ciò sarà $ZX = dz$, $QR = dy$: Ora si ha CZ $[= r]$: ZX $[= dz]$: : CR $[= y]$: Ru $[= dx]$; dunque $rdx = ydz$, o sia (con sostituire in luogo di dz il suo valore poc' anzi

tro-

trovato) $r dx = \frac{y \times q p y^{\frac{q-n}{n}} dy}{n r^{\frac{q}{n}}}$, e $dx = \frac{y \times q p y^{\frac{q-n}{n}} dy}{r \times n r^{\frac{q}{n}}} =$

(A) $\frac{q p y^{\frac{q}{n}} dy}{n r^{\frac{q+n}{n}}}$, che è l'equazione differenziale alle infinite ſpirali paraboliche.

270. Mediante queſta equazione ritroveremo adeſſo la ſottotangente, e la tangente delle ſpirali paraboliche. E quanto alla ſottotangente ſi ſoſtituiſca nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$ il valore di dx preſo dalla precedente equazione [A], e ſi avrà $\frac{y \times q p y^{\frac{q}{n}} dy}{dy \times n r^{\frac{q+n}{n}}} = \frac{q p y^{\frac{q+n}{n}}}{n r^{\frac{q+n}{n}}}$, che è il cercato valore della ſottotangente. La ſottotangente pertanto della ſpirale parabolica di primo grado, o ſia della ſpirale d' Archimede, in cui $q=1$, $n=1$, è $\frac{py^2}{r^2}$: della ſpirale parabolica di ſecondo grado, in cui $q = \frac{1}{2}$, $n=1$, è $\frac{\frac{1}{2} p y^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}}$: della ſpirale parabolica di ter-

zo grado, in cui $q = \frac{1}{3}$ $n = 1$ è $\frac{\frac{1}{3} p y^{\frac{4}{3}}}{r^{\frac{4}{3}}}$, ec. Quanto alla tangente ſi prenda dall' equazione [A] il valore di dy, che è $\frac{dx \times n r^{\frac{q+n}{n}}}{q p y^{\frac{q}{n}}}$, e però

$\overline{dy}^2 = \frac{\overline{dx}^2 \, n^2 \, r^{\frac{2q+2n}{n}}}{q^2 \, p^2 \, y^{\frac{2q}{n}}}$, e nella formola generale

$\frac{y \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy}$ della tangente ſi ſoſtituiſcano queſti valori di dy, e

$\overline{dy}^2$, lo che darà $y \frac{\sqrt{\overline{dx}^2 + \frac{\overline{dx}^2 \, n^2 \, r^{\frac{2q+2n}{n}}}{q^2 \, p^2 \, y^{\frac{2q}{n}}}}}{\frac{dx \times n r^{\frac{q+n}{n}}}{q p y^{\frac{q}{n}}}} =$

$y\surd$

$$\frac{y\sqrt{q^2p^2y^{\frac{2q}{n}}+n^2r^{\frac{2q+2n}{n}}}}{nr^{\frac{q+n}{n}}}$$, che è la formola generale della tangente per le infinite ſpirali paraboliche. Onde perchè nella ſpirale d' Archimede è $q=1$, $n=1$, la di lei tangente è $\frac{y}{r^2}\sqrt{p^2y^2+r^4}$: La tangente della ſpirale di ſecondo grado è $\frac{y}{r^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1}{4}p^2y+r^3}$: La tangente della ſpirale di terzo grado è $\frac{y}{r^{\frac{4}{3}}}\sqrt{\frac{1}{9}p^2y^{\frac{2}{3}}+r^{\frac{8}{3}}}$ ec.

271. Poichè (pel num. 748. Tomo IV.) l'equazione generale alle infinite ſpirali iperboliche è $r^{-n}z^q=y^{-n}p^q$, ſe ſi opererà nella maniera praticata al precedente num. 269, ſi troverà, che l'equazione differenziale delle infinite ſpirali iperboliche è [B] $dx=\frac{npy^{-\frac{n}{q}}dy}{qr^{\frac{q-n}{q}}}$; poichè ſi differenzi l'equazione $r^{-n}z^q=y^{-n}p^q$, e ſi avrà $qr^{-n}z^{q-1}dz=-ny^{-n-1}p^qdy$, da cui ſi pren-

da il valore di dz, che è $dz = -\frac{np^q y^{-n-1}dy}{qr^{-n}z^{q-1}}$. Ma dall' equazione

$r^{-n}z^q = y^{-n}p^q$ si ricava $z^q = \frac{y^{-n}p^q}{r^{-n}}$, e $z = \frac{py^{-\frac{n}{q}}}{r^{-\frac{n}{q}}}$, e in conseguenza

$$\frac{z^q}{z} = z^{q-1} = \frac{\frac{y^{-n}p^q}{r^{-n}}}{\frac{py^{-\frac{n}{q}}}{r^{-\frac{n}{q}}}} = \frac{p^q r^{-\frac{n}{q}} y^{-n}}{pr^{-n}y^{-\frac{n}{q}}} = \frac{p^{q-1}y^{\frac{n-nq}{q}}}{r^{\frac{n-nq}{q}}}\text{; onde sostituendo}$$

questo valore di z^{q-1} nell' equazione $dz = -\frac{np^q y^{-n-1}dy}{qr^{-n}z^{q-1}}$, essa diverrà

$$dz = \frac{-np^q y^{-n-1}dy}{qr^{-n} \times \frac{p^{q-1}y^{\frac{n-nq}{q}}}{r^{\frac{n-nq}{q}}}} = \frac{-npy^{-\frac{n}{q}-1}dy}{qr^{-\frac{n}{q}}}.$$ Posto ciò sia ARQS [*Fig.* 21.]

la spirale, ed ABDPA il circolo generatore, il di cui raggio CA è $=r$, e la periferia $=p$. Si prenda nella di lui periferia una qualunque abscissa ABD$p = x$, e dal centro C si conducano i raggi infinitamente prossimi CP, Cp, che intersecano la spirale ne' punti R, a. Col centro C, e col raggio vettore CR $=y$ si descriva l' arco infinitesimo Rm, che equidisterà dall' arco Pp, dal quale sarà pure equidistante l' archetto an descritto col raggio Ca. Stante ciò sarà P$p = dz$, Ra $= am = dy$: E perchè AP $= p - z$, perciò P$p = -dz$. Quindi essendo CP

CP [$=r$]: Pp [$=-dz$] :: CR [$=y$]: Rm [$=dx$], si avrà $rdx=-ydz$, in cui sostituendo il valore di dz antecedentemente trovato, ne verrà finalmente

$$dx = \frac{npy^{-\frac{n}{q}}dy}{qr^{\frac{q-n}{q}}}$$ cercata equazione differenziale delle infinite spirali iperboliche.

Che però se si sostituirà questo valore di dx nella formola generale

$\frac{ydx}{dy}$ della sottotangente, si avrà

$$\frac{y}{dy}\times\frac{npy^{-\frac{n}{q}}dy}{qr^{\frac{q-n}{q}}}=\frac{npy^{\frac{q-n}{q}}}{qr^{\frac{q-n}{q}}}$$, che è il cercato valore della sottotangente delle

spirali iperboliche; e però rispetto alla spirale iperbolica di primo grado, in cui

$q=1$, $n=1$, la sottotangente è $\frac{py^{\frac{0}{1}}}{r^{\frac{0}{1}}}=p$, vale a dire ella è costante: Della

spirale iperbolica di secondo grado, in cui $q=2$, $n=1$, è $\frac{py^{\frac{1}{2}}}{2r^{\frac{1}{2}}}$: Della spirale

iper-

iperbolica di terzo grado, in cui $q=3$, $n=1$, è $\frac{py^{\frac{2}{3}}}{3r^{\frac{2}{3}}}$ ec.. Per trovare la tangente di queſte ſpirali, ſi prenda dall'equazione (B) il valore di dy, che è

$\frac{dx \times qr^{\frac{q-n}{q}}}{npy^{\frac{-n}{q}}}$, e però $\overline{dy}^2 = \frac{\overline{dx}^2 \times q^2r^{\frac{2q-2n}{q}}}{n^2p^2y^{\frac{-2n}{q}}}$: Onde ſoſtituendo queſti valori di dy, e $\overline{dy}^2$ nella formola generale $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy}$ della tangente, ſi avrà

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \frac{\overline{dx}^2 \times q^2r^{\frac{2q-2n}{q}}}{n^2p^2y^{\frac{-2n}{q}}}}}{\frac{dx \times qr^{\frac{q-n}{q}}}{npy^{\frac{-n}{q}}}} = \frac{y\sqrt{n^2p^2y^{\frac{-2n}{q}} + q^2r^{\frac{2q-2n}{q}}}}{qr^{\frac{q-n}{q}}},$$

che è il valore della tangente nelle infinite ſpirali iperboliche. Se adunque ſi vorrà la tangente della ſpirale iperbolica del primo grado, in cui è $q=1$, $n=1$, eſ-

fa farà $\frac{y\sqrt{p^2y^{-2}+r^{\frac{0}{1}}}}{r^{\frac{0}{1}}} = \frac{y\sqrt{\frac{p^2}{y^2}+r^{\frac{0}{1}}}}{r^{\frac{0}{1}}} = \frac{y\sqrt{p^2+y^2r^{\frac{0}{1}}}}{yr^{\frac{0}{1}}} =$

$\frac{\sqrt{p^2+y^2r^{\frac{0}{1}}}}{r^{\frac{0}{1}}}$ = (con fare $r=1$) $\sqrt{p^2+y^2}$: Della ſpirale iperbolica del

ſecondo grado, in cui ſi ha $q=2$, $n=1$, è $\frac{y\sqrt{p^2y^{-1}+4r}}{2r} =$

$\frac{\sqrt{p^2y+4ry^2}}{2r}$: Della ſpirale iperbolica del terzo grado, in cui ſi ha $q=3$, $n=1$, è

$$\frac{y\sqrt{p^2y^{-\frac{2}{3}}+9r^{\frac{4}{3}}}}{9r^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{p^2y^{\frac{4}{3}}+9y^2r^{\frac{4}{3}}}}{9r^{\frac{2}{3}}}.$$

272. Altrimenti conſiderando le ſpirali iperboliche, così che nella ſpirale di primo grado ſia bensì $q=1$, $n=1$, ma nella ſpirale di ſecondo grado ſia

$q=\frac{1}{2}$, $n=1$; in quella del terzo ſia $q=\frac{1}{3}$, $n=1$; e $q=\frac{1}{4}$, $n=1$ in

quel-

quella del quarto ec., ripigliando la formola generale

$\dfrac{npy^{\frac{q-n}{q}}}{qr^{\frac{q-n}{q}}}$ della ſottotangente, ſarà $\dfrac{py^{-1}}{\frac{1}{2}r^{-1}} = \dfrac{2pr}{y}$ la ſottotangente della ſpirale iperbolica di ſecondo grado; della ſpirale iperbolica di terzo grado la ſottotangente ſarà $\dfrac{py^{-2}}{\frac{1}{3}r^{-2}} = \dfrac{3pr^2}{y^2}$; di quella di quarto grado ſarà

$\dfrac{py^{-3}}{\frac{1}{4}r^{-3}} = \dfrac{4pr^3}{y^3}$. Parimente mediante la formola

$\dfrac{y\sqrt{n^2p^2y^{-\frac{2n}{q}} + q^2r^{\frac{2q-2n}{q}}}}{qr^{\frac{q-n}{q}}}$ della tangente ſi troverà, che il valore della tangente della ſpirale iperbolica di ſecondo grado è

$\dfrac{y\sqrt{p^2y^{-4} + \frac{1}{4}r^{-2}}}{\frac{1}{2}r^{-1}} = \dfrac{\sqrt{4p^2r^2 + y^4}}{y}$; della ſpirale iperbolica di terzo grado è

$y\sqrt{}$

$$\frac{y\sqrt{p^2y^{-6}+\frac{1}{9}r^{-4}}}{\frac{1}{3}r^{-2}}=\frac{\sqrt{9p^2r^4+y^6}}{y^2}$$ di quella di quarto grado è

$$\frac{y\sqrt{p^2y^{-8}+\frac{1}{16}r^{-6}}}{\frac{1}{4}r^{-3}}=\frac{\sqrt{16p^2r^6+y^8}}{y^3}.$$

273. Per ultimo vediamo lo stesso anche nella spirale logaritmica. Poichè l' equazione della logaritmica (pel num. 267.) è $\frac{a^2dy}{y}=mdz$, o sia $\frac{sdy}{y}=dz$, (con fare la sottotangente $\frac{a^2}{m}=s$), se si prenderà AP $=z$ (*Fig.* 21.), indi si conducano i due raggi infinitamente prossimi CP, Cp, sarà P$p=dz=\frac{sdy}{y}$. L' ordinata CR alla spirale logaritmica si dica $=y$. Posto ciò si avrà CP $(=r)$: Pp $(=\frac{sdy}{y})$ :: CR $(=y)$: Rm $(=dx)$, e però $rdx=sdy$ sarà l' equazione alla spirale logaritmica. Per avere in primo luogo la di lei sottotangente, prendo la formola generale $\frac{ydx}{dy}$ della sottotangente, e in luogo di dx vi sostituisco il suo valore desunto dalla trovata equazione, il qual valore trovasi essere $dx=\frac{sdy}{r}$. Fatta la sostituzione si ha $\frac{y}{dy}\times\frac{sdy}{r}=\frac{sy}{r}$, che è il cercato

 valo-

valore della ſottotangente nella ſpirale logaritmica. Quanto alla tangente ſi prenda dalla precedente equazione il valore di dy, che è $dy = \frac{rdx}{s}$, e però

$\overline{dy}^2 = \frac{r^2\,\overline{dx}^2}{s^2}$, e nella formola generale $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy}$ della tangente

ſi ſoſtituiſcano queſti valori di dy, e di $\overline{dy}^2$, e ne verrà

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \frac{r^2\,\overline{dx}^2}{s^2}}}{\frac{rdx}{s}} = \frac{y\sqrt{s^2 + r^2}}{r},$$ che è il valore della tangente. Se

chiameremo $= T$ queſta tangente, ſi avrà $T = \frac{y\sqrt{s^2 + r^2}}{r}$, e però

$r : \sqrt{s^2 + r^2} :: y : T$, cioè l'ordinata y ſtà alla tangente in ragione coſtante:

Siccome [ſi dica la ſottotangente $= S$] eſſendoſi trovato $S = \frac{sy}{r}$, ſi ha $r : s ::$

$y : S$, cioè l'ordinata ſta alla ſottotangente in ragione coſtante, conſeguentemente la tangente ſta alla ſottotangente in ragione coſtante: Ma in ragione coſtante ſta pure CR ad RT, poichè eſſendo ſimili i due triangoli RTC, R*am* aventi gli angoli R*ma*, RCT retti, e a motivo delle parallele R*m*, CT gli angoli alterni *m*R*a*,

RTC eguali, ſi ha *ma* : R*a* :: CR : RT: Ma *ma* : R*a* :: $dy : \sqrt{\overline{Rn}^2 + \overline{an}^2}$

$(= \sqrt{\overline{dy}^2 + \overline{dx}^2}) :: dy : \sqrt{\overline{dy}^2 + \frac{s^2\,\overline{dy}^2}{r^2}}$ (con ſoſtituire il valore di

dx

Digitized by Google

$\overline{dx}^2 = \frac{s^2 \overline{dy}^2}{r^2}$) :: $dy : dy \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{r}$ :: $1 : \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{r}$, cioè in ragione costante. Dunque stando in ragione costante CR ad RT, ed RT a TC, resta dimostrato, che l'angolo CRT fatto dall'ordinata, e dalla tangente, è costante, come aveva promesso di dimostrare al num. 750. Tomo IV.

274. Anche rispetto alle curve riferite al foco notiamo quello, che si è osservato al num. 262. Sia $dy : dx :: \omega : \phi$, dal qual rapporto resta determinata la posizione della tangente, e supponiamo primieramente $\omega = 0$, laonde la ragione di dy a dx sarà minore di qualunque assegnabile, e in tal caso la curva in quel punto, per cui si vuol la tangente, verrà toccata dal circolo, che ha l'ordinata y per raggio, e a questa ordinata sarà perpendicolare la tangente: Per lo che se si vorranno trovare quei punti, ne' quali la tangente è perpendicolare all'ordinata, basterà nell'equazione alla curva far $dy = 0$, lo che fatto si determinerà poscia il valore di y, cui la tangente deve esser perpendicolare. Supponiamo in secondo luogo $\phi = 0$, lo che rende la ragione di dx a dy minore di qualunque assegnabile, e in tal caso l'ordinata y se è finita, sarà sempre tangente della curva; che se è infinita potrà ancora essere tangente della curva a una distanza infinita, o pure sarà tangente un'altra retta parallela a questa ordinata.

275. Resta finalmente da vedersi come si determini la sottotangente, e la tangente delle curve a doppia curvatura, giacchè di queste curve ho trattato all' Articolo XI. Capo IV. del IV. Tomo. Sia $KqZX$ (*Fig.* 27.) una qualunque curva a doppia curvatura descritta su la superficie curva PXRKQ. Le due curve di projezione siano ATBS, NMLO descritte su i piani ortogonali EDCF, EGHF, de' quali EDCF è il piano della base. Essendo dato nella curva a doppia curvatura il punto d, si cerca il valore della sottotangente Vb, che compete a questo punto. Sia VY l'asse delle abscisse x. Dal punto dato d si abbassi normale al piano EDCF la coordinata $db = y$: Dal punto b si tiri perpendicolare all'asse VY delle abscisse l'altra coordinata $bm = z$; onde sarà la terza coordinata $Vm = x$. Infinitamente prossimo al proposto punto d si prenda su la curva a doppia curvatura il punto Z, relativamente al quale si conducano le ordinate Zn, ne. Dal punto d si tiri parallela al piano EDCF la dc, che sarà parallela alla bn. Parimente dal punto b si conduca la ba parallela all'asse VY delle abscisse. Fatto ciò sarà

$me = ba = dx$, $an = dz$; $cZ = dy$: Onde $bn = \sqrt{\overline{ba}^2 + \overline{an}^2} = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}$. Ora sono simili i due triangoli Zdc, dbV, dai quali si ricava la seguente proporzione Zc ($= dy$): cd ($= bn = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}$) :: db ($= y$): $bV =$ (B) $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}}{dy}$ valore cercato della sottotangente bV.

Digitized by Google

276. Gli ſteſſi triangoli Zcd, dbV ſervono a trovare il valore della tangente dV, mentre ſomminiſtrano $Zc : Zd :: db : dV$, cioè in termini analitici [ſi oſſervi, che Zd è $= \sqrt{\overline{dc}^2 + \overline{Zc}^2} = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2 + \overline{dy}^2}$, perchè

$$\overline{dc}^2 = \overline{bn}^2 = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}, \text{ e } \overline{cZ}^2 = \overline{dy}^2 \,]$$

$$dy : \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2 + \overline{dy}^2} :: y : dV =$$

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2 + \overline{dy}^2}}{dy}$$

(D), che è il cercato valore della tangente.

277. Poichè la tangente dV è un prolungamento dell' infiniteſima Zd, e la bV un prolungamento dell' infiniteſima nb, ed nb, Zd ſono in un medeſimo piano, dunque in un medeſimo piano ſono pure la tangente, e la ſottotangente: In oltre il prolungamento della infiniteſima nb eſſendo tangente della curva di projezione BTAS nel punto b, egli è evidente, che la ſottotangente della curva a doppia curvatura cade ſu la tangente del punto b della curva di projezione BTAS, il qual punto b corriſponde al dato punto d della curva a doppia curvatura.

278. Finora abbiamo ritrovato le formole generali della tangente, e della ſottotangente di una curva a doppia curvatura. Per applicarle al caſo particolare di una data curva, biſogna che ſiano date le equazioni delle due curve di projezione, per mezzo delle quali deveſi ritrovare il valore degli elementi di due variabili, come ſarebbe di dx, dz, eſpreſſo colla terza variabile y, e col ſuo elemento dy, indi ſoſtituirlo in loro vece in quella formola delle due precedenti, che ſerve al caſo. Facciamone l' applicazione col ſeguente eſempio.

279. Debbaſi trovare il valore della tangente, e della ſottotangente, che appartengono a un qualſiſia punto d (*Fig.* 27.) della curva a doppia curvatura $KqZX$. Le due curve di projezione ſiano le due eliſſi ASBT, LMNO, delle quali le equazioni ſono $a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2$, $b^2y^2 = b^2q^2 - q^2z^2$. Si differenzi l' una, e l' altra di queſte due equazioni, e ſi avrà $a^2ydy = -c^2xdx$, $b^2ydy = -q^2zdz$. Dalla

prima

prima si prenda il valore di dx, che è $= -\frac{a^2 y\,dy}{c^2 x}$, in cui si sostituisca il valore di x preso dalla prima equazione, che è $= \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - y^2}$, e ne verrà

$dx = -\frac{a}{c} \times \frac{y\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$. Dalla seconda si prenda il valore di dz, che è

$dz = -\frac{b^2 y\,dy}{q^2 z}$, in cui si sostituisca il valore di z preso dalla seconda equazione, che è $= \frac{b}{q}\sqrt{q^2 - y^2}$, lo che fatto si avrà $dz = -\frac{b}{q} \times \frac{y\,dy}{\sqrt{q^2 - y^2}}$.

Ora per avere il valore della sottotangente si sostituiscano nella formola [B] i ritrovati valori di dx, e dz elevati al quadrato, e con ciò si otterrà

$$\frac{y\sqrt{\frac{a^2}{c^2} \times \frac{y^2\,\overline{dy}^2}{c^2 - y^2} + \frac{b^2}{q^2} \times \frac{y^2\,\overline{dy}^2}{q^2 - y^2}}}{dy} =$$

$$y^2\sqrt{\frac{a^2}{c^2 \times \overline{c^2 - y^2}} + \frac{b^2}{q^2 \times \overline{q^2 - y^2}}}$$, che è il cercato valore della sottotangente. Le stesse sostituzioni si facciano nella formola (D) per avere il valore della tangente, che sarà

$$\frac{y\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\times\frac{y^2\,\overline{dy}^2}{c^2-y}+\frac{b^2}{q^2}\times\frac{y^2\,\overline{dy}^2}{q^2-y^2}+\overline{dy}^2}}{dy}=y\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\times\frac{y^2}{c^2-y^2}+\frac{b^2}{q^2}\times\frac{y^2}{q^2-y^2}+1},$$

come ſi cercava.

Delle altre linee analoghe tratterò nel ſeguente Articolo.

A R T I C O L O II.

Della maniera di trovar il valore della normale, della ſubnormale, e di altre linee analoghe nelle curve tanto algebraiche, che traſcendenti, e a doppia curvatura.

280. Lo ſteſſo triangolo differenziale, di cui nel precedente Articolo ci ſiamo ſerviti per giungere all' eſpreſſione dei valori della tangente, e della ſottotangente ſerve iſteſſamente a trovare il valore della normale della ſubnormale ec. Per trovarne primieramente le formole generali ſia EMF (*Fig.* 28) una qualſiſia curva, ſu la quale prendiamo ad arbitrio un qualunque punto M, da cui ſi abbaſsi all' aſſe AD delle abſciſſe x l' ordinata MB $= y$. Infinitamente proſsima a queſta ordinata MB ſi conduca l' altra bm; onde ſarà $Bb = MN = dx$, $Nm = dy$. Normale alla curva nel punto M ſi tiri MD: Egli è evidente, che ſono ſimili i due triangoli MDB, MNm, poichè ſono rettangoli in B, ed N, e in oltre l' angolo BMD è eguale all' angolo mMN, mentre eſſendo retti i due angoli BMN, DMm, ſe gli ſi leverà l' angolo comune DMN, reſterà l' angolo BMD eguale all' angolo mMN. Ora i due triangoli ſimili DMB, MNm ſomminiſtrano la ſeguente proporzione MN $(=dx)$: Nm $[=dy]$ :: MB $(=y)$: BD $=\frac{y\,dy}{dx}$, che è la formola generale eſprimente il valore della ſubnormale.

281. Degli ſteſſi triangoli ſi fa uſo per ottenere la formola generale della normale, mentre eſſi ci eſibiſcono queſta proporzione MN : Mm :: MB : MD, cioè in termini analitici $dx : \sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2} :: y :$ MD $=$

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dx}$$ (perchè $Mm=\sqrt{\overline{MN}^2+\overline{Nm}^2}=\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}$), che è la formola generale della normale.

282. Avendoſi pertanto la formola generale della normale, e della ſubnormale, e dovendoſi trovar la normale, e la ſubnormale di una curva, di cui è data l' equazione, ſi differenzi queſta equazione, e prendendoſi dalla medeſima il valore di

di dx, o di dy, ſi ſoſtituiſca nella formola generale, nel qual modo da lei ſpariranno tutti i differenziali, e il valore cercato verrà eſpreſſo da ſole quantità finite. Vediamone gli eſempj.

283. Si debba trovar il valore della normale, e della ſubnormale nell' iperbola, la di cui equazione è $a^2y^2 = 2ac^2x - c^2x^2$. Si differenzi queſta equazione, e ſi avrà $a^2ydy = ac^2dx - c^2xdx$, da cui ſi prenda il valore di dy, che ſi ſoſtituiſca nella formola generale $\frac{ydy}{dx}$ della ſubnormale, con che nè verrà

$$\frac{y}{dx} \times \frac{ac^2dx - c^2xdx}{a^2y} = \frac{c^2}{a^2} \times \overline{a-x}$$, che è il cercato valore della ſubnormale. Quanto al valore della normale, ſi ſoſtituiſca nella di lei formola generale

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx}$$ il valore di $\overline{dy}^2$ preſo dall' equazione differenziata, che

trovaſi eſſere $= \frac{\overline{dx}^2 \times c^4 \times \overline{a-x}^2}{a^4y^2}$, e fatto ciò ſi avrà

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \frac{\overline{dx}^2 \times c^4 \times \overline{a-x}^2}{a^4y^2}}}{dx} =$$

$$y\sqrt{\frac{a^4y^2 + a^2c^4 - 2ac^4x + c^4x^2}{a^4y^2}} = \sqrt{\frac{a^4y^2 + a^2c^4 - a^2c^2y^2}{a^4y^2}}$$

(con ſoſtituire $-a^2y^2$ in luogo di $-2ac^2x + c^2x^2$) $=$

$$\frac{\sqrt{a^2y^2 + c^4 - c^2y^2}}{ay}$$, o pure $= \frac{\sqrt{a^2c^4 + \overline{a^2 - c^2} \times \overline{2ac^2x - c^2x^2}}}{a\sqrt{2ac^2x - c^2x^2}}$,

ſe

se tale valore si vuol dato per l' absciffa x; lo che si ottiene con sostituire nel precedente i valori di y, e y^2.

284. Prenderò il secondo esempio dall' equazion generale $a' x^m + b' y^n + c' x^p y^q + A = o$. Si differenzi questa equazione, e si avrà $m a' x^{m-1} dx + n b' y^{n-1} dy + p c' y^q x^{p-1} dx + q c' x^p y^{q-1} dy = o$, da cui si prenda il valore di dy, che è $= \frac{-m a' x^{m-1} - p c' y^q x^{p-1}}{n b' y^{n-1} + q c' x^p y^{q-1}} \times dx$.

Questo valore si sostituisca in luogo di dy nella formola generale $\frac{y\,dy}{dx}$ della subnormale, e fatto ciò si avrà

$$\frac{y}{dx} \times \frac{-m a' x^{m-1} - p c' y^q x^{p-1}}{n b' y^{n-1} + q c' x^p y^{q-1}} \times dx = \frac{-m a' x^{m-1} - p c' y^q x^{p-1}}{n b' y^{n-2} + q c' x^p y^{q-2}},$$

che è la formola generale della subnormale per tutte quelle curve la di cui equazione cade sotto l' equazione proposta $a' x^m + b' y^n + c' x^p y^q + A = o$.

285. Che se nella formola $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx}$ si sostituirà il quadrato del poc' anzi trovato valore di dy, ne verrà

y

$$\frac{y}{dx}\sqrt{\overline{dx}^2 \times \frac{\left(-m a' x^{m-1} - p c' y^q x^{p-1}\right)^2}{\left(n b' y^{n-1} + q c' x^p y^{q-1}\right)^2} + \overline{dx}^2}$$

$$= \frac{y}{n b' y^{n-1} + q c' x^p y^{q-1}}\sqrt{\left(-m a' x^{m-1} - p c' y^q x^{p-1}\right)^2 + \left(n b' y^{n-1} + q c' x^p y^{q-1}\right)^2},$$

che è il valore della normale per le steſſe curve come ſi cercava.

286. Le ritrovate formole della normale, e ſubnormale delle curve algebraiche riferite all' aſſe hanno luogo egualmente tanto riſpetto alle curve riferite al foco, che riſpetto alle curve tranſcendenti riferite all' aſſe. Qualora pertanto ſarà data l' equazione a una di queſte curve, ſi troverà il valore della di lei normale, o ſubnormale, operando nella maniera praticata finora. Si debba per eſempio in primo luogo trovare il valore della ſubnormale nelle infinite ſpirali paraboliche, la di cui equazione preſa dal num. 269. è $dx = \dfrac{q p y^{\frac{q}{n}} dy}{n r^{\frac{q+n}{n}}}$.

Queſta equazione ſi riduca ad $\dfrac{n r^{\frac{q+n}{n}}}{q p y^{\frac{q}{n}}} = \dfrac{dy}{dx}$, che moltiplicata per y diventa $\dfrac{n r^{\frac{q+n}{n}}}{q p y^{\frac{q-n}{n}}} = \dfrac{y\,dy}{dx}$, che è il cercato valore della ſubnormale nelle infinite ſpirali paraboliche.

287. Se poi dall' equazione data si prenderà il quadrato del valore di dy, e si sostituirà nella formola generale $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx}$ della normale, si avrà

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \frac{\overline{dx}^2 \times n^2 r^{\frac{2q+2n}{n}}}{q^2 p^2 y^{\frac{2q}{n}}}}}{dx} = \frac{\sqrt{p^2 q^2 y^{\frac{2q}{n}} + n^2 r^{\frac{2q+2n}{n}}}}{q p y^{\frac{q-n}{n}}}$$, che è il

valore della normale nelle infinite spirali paraboliche.

288. Operando d' egual maniera su l' equazione $dx = \frac{q p y^{-\frac{q}{n}} dy}{n r^{-\frac{q+n}{n}}}$ alle infinite spirali iperboliche, si troverà che il valore della loro subnormale viene espresso da $\frac{n r^{-\frac{q+n}{n}}}{q p y^{-\frac{q-n}{n}}} = \frac{y dy}{dx}$, e il valore della normale è

$y\sqrt{}$.

Digitized by Google

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \frac{\overline{dx}^2 \times n^2 r^{-\frac{2q+2n}{n}}}{q^2 p^2 y^{-\frac{2q}{n}}}}}{dx} = \frac{\sqrt{q^2 p^2 y^{-\frac{2q}{n}} + n^2 r^{-\frac{2q+2n}{n}}}}{q p^{-\frac{q-n}{n}}}.$$

289. Parimente nella ſpirale logaritmica, la di cui equazione (pel num. 273.) è $rdx = sdy$, il valore della ſubnormale è $= \frac{ry}{s}$, e il valore della normale è

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dx}^2 \times \frac{r^2}{s^2}}}{dx} = \frac{y}{s}\sqrt{s^2 + r^2}.$$

290. Paſſiamo ora a trovar brevemente le formole generali della normale, e ſubnormale nelle curve a doppia curvatura, Riteniamo le precedenti denominazioni fatte riſpetto alla curva a doppia curvatura KZX [Fig. 27.], e ſia d il punto, a cui ſi deve condur la normale dg, della quale l' eſtremità g trovaſi ſu la ſottotangente Vb prolungata. Coſta dalla dimoſtrazione data al num. 275. che ſono ſimili i due triangoli Zdc, dbg, dai quali ſi ricavano le due ſeguenti proporzioni

$$dc\left(=\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}\right) : Zc\,(=dy) : : db\,(=y) : bg = \frac{ydy}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}},$$ e

$$dc\left(=\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}\right) : dZ\left(=\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2 + \overline{dy}^2}\right) : db : (=y) : dg =$$

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2 + \overline{dy}^2}}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}}.$$ La formola generale adunque, che dà il va-

Digitized by Google

lore della ſubnormale nelle curve a doppia curvatura è $\frac{y\,dy}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}}$, e la formola, che dà il valore della normale è $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2 + \overline{dy}^2}}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dz}^2}}$.

291. Qui poi ſi oſſervi, che la normale trovata deve eſſere ſu lo ſteſſo piano, ſul quale è il triangolo differenziale Zdc. E ben vero, che pel lato infiniteſimo Zd potendo paſſare infiniti piani, infinite perciò ſono le normali, che competono al punto d: Pure la normale, che ci viene eſibita dalla formola trovata è la ſola dg.

292. Vediamo l' applicazione delle formole trovate ſu la curva a doppia curvatura KZX [Fig. 27] alle di cui curve di projezione LMNO, ATBS competono le equazioni $a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2$, $b^2y^2 = b^2q^2 - q^2z^2$. Si differenzino queſte equazioni, e ne verrà $a^2ydy = -c^2xdx$, $b^2ydy = -q^2zdz$, dalle quali ſi prendano i valori di $\overline{dx}^2$, $\overline{dz}^2$ dati per y, e dy, che ſono $\overline{dx}^2 = \frac{a^2}{c^2} \times \frac{y^2\,\overline{dy}^2}{c^2 - y^2}$, e $\overline{dz}^2 = \frac{b^2}{q^2} \times \frac{y^2\,\overline{dy}^2}{q^2 - y^2}$, che ſi ſoſtituiſcano nelle trovate formole della normale, e della ſubnormale, lo che fatto ne verrà

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} \times \frac{y^2\,\overline{dx}^2}{c^2 - y^2} + \frac{b^2}{q^2} \times \frac{y^2\,\overline{dy}^2}{q^2 - y^2}}} = \frac{\sqrt{c^2 - y^2 \times q^2 - y^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} \times q^2 - y^2 + \frac{b^2}{q^2} \times c^2 - y^2}},$$

che è il valore della ſubnormale; e

$\sqrt{a^2}$

$$\frac{y\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\times\frac{y^2\,\overline{dy}^2}{c^2-y^2}+\frac{b^2}{q^2}\times\frac{y^2\,\overline{dy}^2}{q^2-y^2}+\overline{dy}^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\times\frac{y^2\,\overline{dy}^2}{c^2-y^2}+\frac{b^2}{q^2}\times\frac{y^2\,\overline{dy}^2}{q^2-y^2}}}=$$

$$\frac{y\,dy\sqrt{\frac{\frac{a^2}{c^2}y^2\times\overline{q^2-y^2}+\frac{b^2}{q^2}y^2\times\overline{c^2-y^2}+\overline{c^2-y^2}\times\overline{q^2-y^2}}{\overline{c^2-y^2}\times\overline{q^2-y^2}}}}{y\,dy\sqrt{\frac{\frac{a^2}{c^2}\times\overline{q^2-y^2}+\frac{b^2}{q^2}\times\overline{c^2-y^2}}{\overline{c^2-y^2}\times\overline{q^2-y^2}}}}=$$

$$\frac{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}y^2\times\overline{q^2-y^2}+\frac{b^2}{q^2}y^2\times\overline{c^2-y^2}+\overline{c^2-y^2}\times\overline{q^2-y^2}}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\times\overline{q^2-y^2}+\frac{b^2}{q^2}\times\overline{c^2-y^2}}}$$

che à il valore della normale.

293. Dopo aver date le formole generali della normale, e fubnormale, e la loro applicazione ai cafi particolari foggiungerò le formole generali d' altre linee analoghe alla normale, e fubnormale, come pure d' alcune linee analoghe alla tangente, e fottotangente. E primieramente fia MD (Fig. 28.) la normale alla curva nel punto M, cui corrifponde l' ordinata MB. Dall' eftremità B di quefta ordinata fi tiri alla normale MD la perpendicolare BG, ed ora debbafi trovare la formola generale, che dà il di lei valore. E' manifefto, che fono fimili i due triangoli MNm, MBG, da' quali fi deduce la feguente proporzione

$$Mm\left(=\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\right) : Nm\,[=dy] :: MB\,[=y] : BG=\frac{y\,dy}{\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}},$$

che

che è la cercata formola generale esprimente il valore della BG. Che se si vorrà la formola generale, la quale dà il valore della MG, essa si dedurrà dagli stessi triangoli simili MNm, MBG, i quali somministrano questa proporzione

$$Mm\left(=\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\right) : MN\,(=dx) :: MB\,(=y) : MG = \frac{y\,dx}{\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}},$$

che è la cercata formola generale esibente il valore della MG eguale alla BK. Se si sottrerrà questa formola $\frac{y\,dx}{\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}$ da $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dx}$, che è la formola generale della normale, si avrà

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dx} - \frac{y\,dx}{\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}} = \frac{y\,\overline{dy}^2}{dx\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}},$$

che è la formola generale della GD. Che se da $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dy}$ si sottrerrà la precedente formola $\frac{y\,dy}{\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}$, ne verrà

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dy} - \frac{y\,dy}{\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}} = \frac{y\,\overline{dx}^2}{dy\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}},$$

che è la formola generale, la quale somministra il valore della PK. Per trovare la formola generale, dalla quale si ha il valore della AP intercetta fra la tangente, e il vertice della curva, basterà sottrarre l' abscissa x da $\frac{y\,dx}{dy}$ formola generale

rale della sottotangente, con che si avrà $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$, che è la cercata formola generale, che esibisce il valore della PA. Che se si vorrà la formola generale della AH, la quale dal vertice A della curva si conduce perpendicolare alla tangente PM, essa si dedurrà dai triangoli simili MNm, PAH, che somministrano questa proporzione Mm [$= \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$]: N$m$ [$=dy$]::

PA [$= \frac{ydx - xdy}{dy}$]: AH $= \frac{ydx - xdy}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$ formola generale cercata della AH. Gli stessi triangoli MNm, PAH servono a trovare la formola generale della PH intercetta fra la sottotangente, e la perpendicolare AH, mentre dai medesimi si ottiene questa proporzione Mm : MN : : AP : PH, cioè in termini analitici $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} : dx :: \frac{ydx - xdy}{dy} : \frac{dx \times \overline{ydx - xdy}}{dy\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$, che è la formola generale somministrante il valore della PH. Se poi si vorrà la formola generale della HK intercetta fra le due perpendicolari BK, AH, bisognerà sottrarre da $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy}$ formola generale della tangente PM le formole seguenti $\frac{dx \times \overline{ydx - xdy}}{dy\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$, $\frac{ydy}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$, la prima delle quali serve per avere il valore della PH, e la seconda dà il valore della BG $=$ KM.

Facendo adunque l' indicata operazione, si avrà $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy} -$

ydy

$$\frac{ydy}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} - \frac{dx \times \overline{ydx - xdy}}{dy\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} = \frac{xdx}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}},$$

che è la formola generale pel valore della HK. In oltre si avrà la formola generale per la retta HM con sottrarre da $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy}$ formola generale della tangente la formola $\frac{dx \times \overline{ydx - xdy}}{dy\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$, che serve per la PH, lo che facendo ne verrà $\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy} - \frac{dx \times \overline{ydx - xdy}}{dy\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} =$

$\frac{ydy + xdx}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$, che è la formola generale pel valore della HM. Se alla formola $\frac{ydy}{dx}$ della normale si aggiungerà l' abscissa $x = AB$, si avrà

$\frac{ydy}{dx} + x = \frac{ydy + xdx}{dx}$, che è la formola generale esibente il valore della AD. Finalmente se si vorrà la formola generale per la PD aggregato della sottotangente, e della subnormale, sarà di mestiere sommare insieme le loro formole così $\frac{ydx}{dy} + \frac{ydy}{dx} = \frac{y \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dxdy}$; che è la formola generale cercata, dalla quale si ottiene il valore della PD.

294. Dall' applicazione, che di sopra ho fatto delle formole generali della tangente, sottotangente, normale, e subnormale ai casi particolari, rendesi abbastanza manifesto il modo, con cui devesi operare per servirsi al bisogno delle precedenti formole, onde è affatto superfluo il farne ulteriormente parola.

ARTICOLO III.

Degli Asintoti.

295. Abbiamo veduto al num. 592. Tomo IV., che dal supporsi le variabili x, y dell' equazione a una curva o infinite, o infinitamente piccole, nascono tre casi, che portano a rami di curva infiniti. Il primo quando alla x finita, o infinitamente piccola corrisponde la y infinita, nel qual caso il ramo di curva si accosta infinitamente o all' asse delle ordinate, o a una di lui parallela, vale a dire o l' asse delle ordinate, o una retta a lui parallela è asintoto di questo ramo di curva. L' asse delle ordinate sarà asintoto, allorchè la x sarà infinitamente piccola; ma se la x sarà finita l' asintoto sarà una parallela all' asse delle ordinate, e l' estremità della x finita darà il punto, da cui deve partire quest' asintoto parallelo alle ordinate. Il secondo quando alla x infinita corrisponde la y finita, o infinitamente piccola, e in questo caso il ramo di curva si accosterà infinitamente o all' asse delle abscisse, o a una retta a lui parallela: Ogniqualvolta la y sia infinitamente piccola, l' asse delle abscisse sarà l' asintoto di questo ramo di curva; che se la y sarà finita, l' asintoto sarà una retta parallela all' asse delle abscisse, la qual parallela passerà per l' estremità di y finita. Il terzo quando alla x infinita corrisponde la y parimente infinita, e *vice versa*. In questo caso il ramo di curva si scosta infinitamente tanto dall'asse delle abscisse, che da quello delle ordinate. Per non ripetere soverchiamente le cose esposte altrove, rimetto a quanto intorno agli asintoti ho detto nel luogo citato.

296 Se si differenzierà l' equazione alla curva; dalla quale si deduca la ragione di dx a dy, egli è manifesto, che rispetto al primo caso poc' anzi accennato, dovrà essere $dx : dy :: 0 : 1$; rispetto al secondo dovrà essere $dx : dy :: 1 : 0$; rispetto poi al terzo si troverà finita la ragione di dx a dy, e da questa ragione resterà determinato l' angolo, che coll' asse delle abscisse fa l' asintoto. Ma per conoscere la ragione di dx a dy è necessario sapere, se supposta infinita l' abscissa x, la y sia finita, o infinita, o infinitamente piccola; o pure se fatta infinita la y, la x sia finita, o infinita, o infinitamente piccola. Che però data l' equazione a una curva, della quale si vogliono determinare gli asintoti, si supponga primieramente la x infinita, e in una tale supposizione si ricavi dall' equazione il valore di y. Se la y avrà un sol valore, una sola sostituzione in luogo di y si potrà fare nel rapporto di dx a dy, che perciò sarà un solo, e darà la posizione di un solo asintoto: Ma se il valore di y sarà moltiplice, con sostituire questi valori di y nel rapporto di dx a dy, ne risulteranno tanti rapporti di dx a dy, quanti sono questi valori di y, dai quali rapporti verrà esibita la posizione d' altrettanti asintoti. Queste operazioni, che si sono fatte nella supposizione di x in-

x infinita, si ripetano col supporre infinita la y, e in questo modo tanto nella supposizione di x, che di y infinita si troveranno gli asintoti, che ammette la curva.

297. Per determinare il punto, in cui l'asintoto incontra l'asse delle abscisse, o sia per determinare l'intercetta tra il vertice D della curva (Fig. 22.), e il punto A, ove l'asintoto taglia l'asse delle abscisse, si faccia così. Si trovi il valore della sottotangente [suppongo che le abscisse comincino dal vertice della curva] nella supposizione di x infinita, corrispondente cioè al punto infinitamente rimoto, in cui l'asintoto tocca la curva, e da questo valore della sottotangente si sottragga la x, e ciò che ne verrà sarà il valore della AD. Parimente per determinare il punto E, in cui lo stesso asintoto incontra l'asse DF delle ordinate, allorchè la y è infinita, si trovi [pel num. 242.] su l'asse delle ordinate il valore della sottotangente corrispondente allo stesso punto, in cui l'asintoto tocca la curva, qual valore si sottragga dalla y, e ciò, che ne verrà sarà il valore di DE. Avendosi questi due punti, si ha ancora la posizione dell'asintoto, che si cercava. Adunque quando la ragione di dx a dy è finita devonsi trovare nel modo detto i due punti A, E, pe' quali deve passare l'asintoto: Quando è $dx : dy :: 0 : 1$, lo che succede allora quando la y è infinita, in tal caso il solo punto A basterà per condurre l'asintoto, mentre se il valore di AD è $= 0$, l'asse delle ordinate è l'asintoto cercato, se AD trovasi eguale a una quantità finita, la retta condotta pel punto A parallela all'asse delle ordinate è l'asintoto: Quando è $dx : dy :: 1 : 0$, e ciò ha luogo qualora la x è infinita, in tal caso il solo punto E servirà per condurre l'asintoto, mentre se il valore di DE è $= 0$, l'asse delle abscisse è l'asintoto, e se DE è eguale a una quantità finita, la retta, che pel punto E si conduce parallela all'asse delle abscisse, è l'asintoto cercato. Coll'esempio riduciamo le cose dette al caso pratico.

298. Sia data l'equazione $y^{m+n} = \frac{p}{a} x^m \times \overline{a+x}^{\,n}$, che (pel num. 427. Tomo IV.) è alla famiglia delle iperbole, e si voglia determinare la posizione degli asintoti, che loro competono. Col differenziare questa equazione ne viene

$$\overline{m+n} \times y^{m+n-1}\, dy = \frac{p}{a}\, m\, x^{m-1} \times \overline{a+x}^{\,n} \times dx +$$

$$\frac{p}{a}\, n\, x^m \times \overline{a+x}^{\,n-1} \times dx,$$ che riduco a questa forma

$\frac{a}{p}$

Digitized by Google

$$\frac{a}{P} \times \overline{\frac{m+n}{y}} \times y^{m+n}\, d y = \overline{m x^{m-1} \times \overline{a+x}^{\,n} + \frac{n x^{m} \times \overline{a+x}^{\,n}}{a+x}} \times d x$$

la quale mediante la riduzione allo steſſo denominatore diventa

$$(\text{R}) \quad \frac{a}{P} \times \overline{a+x} \times \overline{m+n} \times y^{m+n} \times d y =$$

$$\overline{a m x^{m-1} + m x^{m}} \times \overline{a+x}^{\,n} + n x^{m} \times \overline{a+x}^{\,n} \times y\, d x.$$

Ma perchè ſi ſuppone la x infinita, perciò $a + x$ ſi riduce ad x, e il termine $a m x^{m-1}$ a confronto degli altri va a zero, onde la precedente equazione ſi riduce ad $\frac{a}{P} \times x \times \overline{m+n} \times y^{m+n} \times d y = \overline{m+n} \times x^{m+n} \times y d x$, nella quale ſi ſoſtituiſca il valore di y^{m+n} preſo dall' equazione, che è $\frac{P}{a} x^{m+n}$, cui ſi riduce $\frac{P}{a} x^{m} \times \overline{a+x}^{\,n}$ a motivo di x infinita, e fatto ciò ſi avrà $\frac{a}{P} x \times \overline{m+n} \times \frac{P}{a} x^{m+n} d y = \overline{m+n} \times x^{m+n} \times y d x$,

cioè a dire $x d y = y d x$. Da cui ſi deduce il rapporto di dx a dy, che è $dx : dy :: x : y$. Queſto rapporto poi non è ancor noto, perchè non coſta peranche qual valore competa alla y; però in luogo di y vi ſi ſoſtituiſca il ſuo valo-

re

Digitized by Google

re preso dall' equazione data, che a motivo di x infinita si riduce a $y^{m+n} = \frac{P}{a}x^{m+n}$: Estraendo pertanto da ambi i membri di questa equazione la radice indicata da $m+n$, ne viene $y = x\frac{P^{\frac{1}{m+n}}}{a^{\frac{1}{m+n}}}$, che è il valore di y da sostituirsi in suo luogo nella precedente proporzione, con che essa si cambia nella seguente $dx : dy :: x : \frac{xP^{\frac{1}{m+n}}}{a^{\frac{1}{m+n}}}$, cioe a dire $dx : dy :: a^{\frac{1}{m+n}} : P^{\frac{1}{m+n}}$: La ragione adunque di dx a dy è finita; conseguentemente l'asintoto taglia nel tempo stesso tanto l'asse delle abscisse, che quello delle ordinate. Cerchiamo adunque i punti, ne' quali questi assi vengono tagliati dall' asintoto, e primieramente determiniamo il punto A, in cui l'asintoto incontra l' asse delle abscisse. A questo fine si trovi il valore della sottotangente con ricavare dall' equazione (R) il valore di $\frac{ydx}{dy}$, che trovasi essere

$\frac{ydx}{dy}$

$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{\frac{a}{p} \times \overline{m+n} \times \overline{a+x} \times y^{m+n}}{a\,m\,x^{m-1} + m\,x^{m} \times \overline{a+x}^{n} + n\,x^{m} \times \overline{a+x}^{n}}$$, in cui si

sostituisca il valore di y^{m+n} preso dall' equazione data, con che la formola diverrà

$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{\frac{a}{p} \times \overline{m+n} \times \overline{a+x} \times \frac{p}{a}\,x^{m} \times \overline{a+x}^{n}}{a\,m\,x^{m-1} + m\,x^{m} \times \overline{a+x}^{n} + n\,x^{m} \times \overline{a+x}^{n}} =$$

(mediante il togliere $x^{m} \times \overline{a+x}^{n}$ tanto dal numeratore, che dal denominatore)

$$\frac{\overline{m+n} \times \overline{a+x}}{a\,m\,x^{-1} + m + n} = \frac{\overline{m+n} \times \overline{a+x}}{\frac{a\,m}{x} + m + n} = \frac{\overline{m+n} \times \overline{a+x} \times x}{a\,m + m\,x + n\,x} =$$

$\frac{\overline{m+n} \times \overline{a\,x + x^{2}}}{a\,m + m\,x + n\,x}$ (S), che è il cercato valore della sottotangente. Ora per avere il valore di A D, si sottragga la x da questo valore della sottotangente, e ne verrà $\frac{\overline{m+n} \times \overline{a\,x + x^{2}}}{a\,m + m\,x + n\,x} - x =$

$$\frac{a\,m\,x + a\,n\,x + m\,x^{2} + n\,x^{2} - a\,m\,x - m\,x^{2} - n\,x^{2}}{a\,m + m\,x + n\,x} = \frac{a\,n\,x}{a\,m + m\,x + n\,x} =$$

(per-

(perchè $x = \infty$) $\dfrac{a\,n\,x}{m\,x + n\,x} = \dfrac{a\,n}{m+n} = AD$, valore cercato di AD, dal quale resta determinato il punto A su l'asse delle abscisse, pel qual punto passa l'asintoto. Passiamo adesso a determinare su l'asse DF delle ordinate il punto E, per cui pure deve passare l'asintoto, e a questo effetto cerchiamo il valore della sottotangente presa su l'asse delle ordinate. Per trovarla prendo la precedente equazione (S) $\dfrac{y\,dx}{dy} = \dfrac{\overline{m+n} \times \overline{a\,x + x^2}}{a\,m + \overline{m+n} \times x}$, che divido per $x\,y$, con che essa diventa $\dfrac{dx}{x\,dy} = \dfrac{\overline{m+n} \times \overline{a+x}}{\overline{a\,m + \overline{m+n} \times x} \times y}$, nella quale equazione facendo passare i denominatori in numeratori, e i numeratori in denominatori, ne verrà il valore della sottotangente su l'asse delle ordinate, cioè $\dfrac{x\,d\,y}{ax} =$

$$\frac{\overline{a\,m + \overline{m+n} \times x} \times y}{\overline{m+n} \times \overline{a+x}}.$$

Si sottragga adesso dalla y infinita questo valore della sottotangente, lo che darà $y - \dfrac{\overline{a\,m + \overline{m+n} \times x} \times y}{\overline{m+n} \times \overline{a+x}} =$

$$\frac{a\,m\,y + a\,n\,y + \overline{m+n} \times x \times y - a\,m\,y - \overline{m-n} \times x \times y}{\overline{m+n} \times \overline{a+x}}$$

=

Digitized by Google

$= \frac{any}{\overline{m+n} \times \overline{a+x}} = \frac{any}{\overline{m+n} \times x}$, perchè essendo la x infinita, la quantità

$a + x$ si riduce ad x. Adunque $DE = \frac{any}{\overline{m+n} \times x}$. Che se per ultimo si sostiturà qui il valore di y preso dall' equazione proposta, che è

$y = \frac{xP^{\frac{1}{m+n}}}{a^{\frac{1}{m+n}}}$, come poc' anzi abbiamo veduto, a motivo d' essere infinita la x, si avrà $DE = \frac{anxP^{\frac{1}{m+n}}}{\overline{m+n} \times xa^{\frac{1}{m+n}}} =$

$$\frac{anP^{\frac{1}{m+n}}}{\overline{m+n} \times a^{\frac{1}{m+n}}} = \frac{n}{m+n} aP^{\frac{1}{m+n}} \times a^{\frac{-1}{m+n}}$$

$$= \frac{n}{m+n} P^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{1-1}{m+n}} = \frac{n}{m+n} P^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{m+n-1}{m+n}}$$

$= \frac{n}{m+n} \sqrt[m+n]{Pa^{m+n-1}}$, che è il cercato valore di DE. Per altro

egli

egli si poteva trovare più speditamente mediante il valore di $AD = \frac{an}{m+n}$,

e il ritrovato rapporto di dx a dy, che è $a^{\frac{1}{m+n}} : P^{\frac{1}{m+n}}$, facendo

$$a^{\frac{1}{m+n}} : P^{\frac{1}{m+n}} :: \frac{an}{m+n} : DE = \frac{anP^{\frac{1}{m+n}}}{\overline{m+n} \times a^{\frac{1}{m+n}}},$$ come prima.

299. Essendosi trovati i valori di DA, DE, si hanno i punti, A, E, pe' quali conducendosi la retta AG, essa sarà l'asintoto cercato.

300. Ci somministrerà un altro esempio la curva dell'equazione $xy^2 - a^2y - b^3 = 0$ [*Fig.* 23.]. Supponendo infinita la x si trovi il valore di y, che è $y = \frac{a^2 \pm \sqrt{4b^3x + a^4}}{2x}$, che a motivo di x infinita si riduce a

$$y = \pm \frac{\sqrt{4b^3x}}{2x} = \pm \sqrt{\frac{b^3}{x}}$$ quantità infinitamente piccola. Con differenziare la

proposta equazione, si avrà $y^2dx + 2xydy - a^2dy = 0$, da cui si ricava il rapporto di dx a dy, che è $dx : dy : -2xy + a^2 \; y^2 :: -2x : y$ [perchè la x è infinita], conseguentemente a motivo di y infinitamente piccola è $dx : dy :: 2x : 0$. Dunque l'asintoto o è l'asse delle abscisse, o una parallela a quest'asse. Per vedere se è o l'uno, o l'altra, cerco in che punto quest'asintoto incontra l'asse delle ordinate, e a tale oggetto prendo su l'asse delle ordinate il valore della sottotangente, che è $\frac{xdy}{dx} = \frac{-xy^2}{2xy - a^2}$, da cui sottraggo la y, e fatto ciò mi viene

$$\frac{-xy^2}{2xy - a^2} - y = \frac{-xy^2 - 2xy^2 + a^2y}{2xy - a^2} = \frac{-3xy^2}{2xy}$$ [a motivo che la x è in-

finita]

finita] $= -\frac{3}{2}y$: Ma y è infinitamente piccola; dunque l'asintoto incontra all' origine l'asse delle ordinate, e però l'asse BC delle abscisse è l'asintoto cercato, che compete ai due rami infiniti FG, KH. Supponiamo ora infinita la y, e cerchiamo qual valore in tale supposizione competa alla x. Prendendo dall'equazione data il valore di x, si trova $x = \frac{a^2}{y} + \frac{b^3}{y^2}$; dunque allorchè la y è infinita la x è infinitamente piccola: per lo che il rapporto di dx a dy, che si è trovato essere $dx : dy :: -2x : y$, diventa $dx : dy :: 0 : y$, conseguentemente l'asintoto è l'asse delle ordinate, o una retta a lui parallela. Per conoscere se è o l'uno, o l'altra, cerco su l'asse delle abscisse il valore della subtangente, che è $\frac{ydx}{dy} = -\frac{2xy^2 + a^2y}{y^2}$, da cui sottraggo la x, e fatto ciò ritrovo $-\frac{2xy^2 + a^2y}{y^2} - x = -\frac{3xy^2}{y^2} = -3x$, che per essere quantità infinitamente piccola, fa vedere, che l'asintoto passa per l'origine delle abscisse, e in conseguenza egli è l'asse delle ordinate DM, che compete ai due rami FE, KL.

301. La maniera d'operare pur ora praticata esige, che si separino le variabili x, y a fine di determinare il valore di y, allorchè si suppone infinita la x, o di determinare il valore di x quando si suppone infinita la y, come pure a fine di ottenere i valori cercati espressi con una sola variabile: Ma se non si potranno separare le variabili, o non si vorrà, per non imbarazzarsi in un calcolo lungo, si potrà trovare la cercata posizion degli asintoti nella maniera seguente. Si debba determinare la posizione degli asintoti, che competono alla curva GAHLAP [Fig. 26.], la di cui equazione è $y^4 - x^4 + 2bx^2y = 0$. Differenziando questa equazione si trova $4y^3dy - 4x^3dx + 4bxydx + 2bx^2dy = 0$, dalla quale si ricavi il valore della sottotangente presa su l'asse delle abscisse DQ nella supposizione di $x = \infty$, con fare primieramente $\frac{dx}{dy} = (A)\ \frac{2y^3 + bx^2}{2x^3 - 2bxy}$, indi moltiplicare l'uno, e l'altro membro per y, lo che somministra il cercato valore della sottotangente, che è $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^4 + bx^2y}{2x^3 - 2bxy}$. Questo valore della sottotangente si sottragga da x a fin d'avere su l'asse delle abscisse l'intercetta fra il punto dell'origine delle coordinate, e l'asintoto, o sia a fin d'avere su l'asse delle abscisse il punto, per cui

cui deve paſſare l' aſintoto. Ciò facendo ſi avrà $x - \frac{2y^4 - bx^2y}{2x^3 - 2bxy} =$

$\frac{2x^4 - 2bx^2y - 2y^4 - bx^2y}{2x^3 - 2bxy} = \frac{2x^4 - 2y^4 - 3bx^2y}{2x^3 - 2bxy}$. Ma l' equazione propoſta ſomminiſtra $2x^4 - 2y^4 = 4bx^2y$, dunque nella pur' ora ritrovata formola ſoſtituendo queſto valore di $2x^4 - 2y^4$, eſſa diverrà $\frac{bx^2y}{2x^3 - 2bxy}$, che chiamo $= z$ facendo $\frac{bx^2y}{2x^3 - 2bxy} = z$, e però $bx^2y = 2x^3z - 2bxyz$, dalla quale prendo il valore di y, che è $y = \frac{2x^3z}{bx^2 + 2bxz} = \frac{2x^3z}{bx^2}$ (perchè eſſendo ſuppoſta la x infinita, il termine $2bxz$ va a zero a confronto di bx^2) $= \frac{2xz}{b}$. Si ſoſtituiſca adeſſo queſto valore di y nell' equazione data, e mediante ciò eſſa ſi cambierà nella ſeguente $\frac{16x^4z^4}{b^4} - x^4 + 4x^3z = 0$, che ſi riduce a $\frac{16x^4z^4}{b^4} - x^4 = 0$, perchè il termine $4x^3z$ in paragone degli altri va a zero. Finalmente da queſta ritrovata equazione ſi prenda il valore di z, e ſi avrà $z = \pm \frac{1}{2}b$. Dunque l' aſintoto incontra l' aſſe delle abſciſſe alla diſtanza $\pm \frac{1}{2}b$ dall' origine delle coordinate, e in conſeguenza pei punti m, n ſu l' aſſe delle abſciſſe paſſano due aſintoti della curva.

302. Collo ſteſſo metodo cerchiamo ſu l' aſſe CB delle ordinate il punto, pel quale devono paſſare queſti aſintoti, determinato il quale reſterà determinata la loro poſizione. A tale oggetto prendo nella ſuppoſizione di $y = \infty$ il valore della ſottotangente, che cade ſu l' aſſe delle ordinate, per avere il quale non altro faccio,

cio, che cambiare posto ai numeratori, e denominatori dell' equazione [A] così $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 - 2bxy}{2y^3 + bx^2}$, indi moltiplicarla per x, con che mi viene $\frac{xdy}{dx} = \frac{2x^4 - 2bx^2y}{2y^3 + bx^2}$ valore cercato della sottotangente. Per avere su l' asse delle ordinate il punto, per cui passa l' asintoto, sottraggo la y da questo valore della sottotangente, e mi viene $\frac{2x^4 - 2bx^2y}{2y^3 + bx^2} - y =$

$\frac{2x^4 - 2bx^2y - 2y^4 - bx^2y}{2y^3 + bx^2} = \frac{2x^4 - 2y^4 - 3bx^2y}{2y^3 + bx^2}$, che con sostituire $4bx^2y$ in luogo di $2x^4 - 2y^4$ diventa $\frac{bx^2y}{2y^3 + bx^2}$, che faccio eguale ad u così $\frac{bx^2y}{2y^3 + bx^2} = u$; onde sarà $bx^2y = 2uy^3 + bux^2$, da cui prendo il valore di x^2, che è $x^2 = \frac{2uy^3}{by - bu} = \frac{2uy^3}{by}$ [a motivo di $y = \infty$] $= \frac{2uy^2}{b}$. Sostituisco pertanto nella data equazione alla curva questo valore di x^2, con che essa si cambia in $y^4 - \frac{4u^2y^4}{b^2} + 4uy^3 = 0$, che per esser $y = \infty$ si riduce a $y^4 - \frac{4u^2y^4}{b^2} = 0$, dalla quale ricavandosi il valore di u ne viene $u = \pm \frac{1}{2} b$, che devesi prendere col segno inferiore cioè $- \frac{1}{2} b$. Quindi l' asintoto incontra l' asse CB delle ordinate alla distanza $- \frac{1}{2} b$ dall' origine delle coordinate, cioè nel punto q. Ed ecco che senza aver bisogno di separare le variabili si sono determinati i punti m, q, ed n, q, che danno la posizione dei due asintoti FM, KN, che si dovevano trovare.

303. Quanto alle curve riferite al foco se la ragione $dx : dy$ sarà minore di qualunque assegnabile, cioè a dire sia $dx : dy :: 0 : 1$, e l' ordinata y sia infinita,

 in

in tal caſo o tale ordinata, o una retta a lei parallela ſarà aſintoto della curva. Si ravviſerà poi facilmente ſe queſta ordinata, o una retta a lei parallela ſia aſintoto della curva, baſtando ſolamente trovare il valore della ſottotangente nella ſuppoſizione di $y = \infty$, mentre ſe queſto valore ſarà $= 0$, l' ordinata ſarà l' uffizio d' aſitoto : Se poi il valore della ſottotangente ſarà eguale a una quantità finita, per eſempio $= p$, allora l' aſintoto ſarà una retta parallela alla detta ordinata, la di cui diſtanza dalla ſteſſa ordinata ſarà $= p$. Per altro queſta parallela non ſarà aſintoto della curva, ogniqualvolta il valore della ſottotangente ſia infinito.

304. Si determinerà la poſizione dell' aſintoto nelle curve a doppia curvatura con prendere primieramente l' eſpreſſione del valore della ſottotangente nel caſo di $x = \infty$, che a cagion d' eſempio ſuppongo $= A\,x = A\,\infty$, indi iſtituite queſta proporzione, come $A\,\infty$ all' ordinata corriſpondente ad x infinita, così A al quarto, che dico $= B$, e la ragione $A : B$ darà il rapporto del coſeno al ſeno dell' angolo, che colla ſottotangente fa l' aſintoto. Queſta ſottotangente poi, come coſta dal num. 277. è l' aſintoto della curva di projezione ſu la baſe.

305. Rimane a dirſi in che modo col calcolo differenziale ſi determini il genere degli aſintoti, lo che col calcolo finito ho pienamente all' Art. IV. Capo IV. Tomo IV. eſpoſto. Nel dare il modo di differenziare abbiamo veduto per qual ragione pel differenziale di x^2 ſi prenda $2xdx$, quando col non ommettere alcun termine è $-x^2 + \overline{x + dx} \times \overline{x + dx} = 2xdx + \overline{dx}^2$; pel differenziale di x^3 ſi prenda $3x^2dx$, quando non ommettendo alcun termine è

$$-x^3 + \overline{x + dx} \times \overline{x + dx} \times \overline{x + dx} = 3x^2dx + 3x\overline{dx}^2 + \overline{dx}^3 \text{ ec.}$$

Queſti termini, ne' quali hanno luogo le poteſtà più alte di dx, cioè $\overline{dx}^2$, $\overline{dx}^3$, $\overline{dx}^4$, che a ragione ſi ommettono, allorchè ſuſſiſtono i termini, ne' quali entra dx, non ſempre in qualunque calcolo ſi poſſono ommettere. Ogniqualvolta dx è moltiplicato per zero, deveſi ritenere nel calcolo $\overline{dx}^2$: Se ſarà moltiplicato per zero tanto dx, che $\overline{dx}^2$, non ſi potrà ommettere $\overline{dx}^3$ ec., e il motivo ſi è, perchè in tal caſo da queſti differenziali ſuperiori dipende la ragione ultima, che ſerve a determinare le quantità, che ſi cercano. Ciò poſto, poichè l' aſintoto reſta determinato dal rapporto di dx a dy, ſe accaderà, che ſia $dx : dy :: 0 : 1$, ovvero $dx : dy :: 1 : 0$, tale rapporto ſervirà bensì a determinare la poſizion dell' aſintoto, ma per ravviſare in oltre il di lui genere, biſognerà nel differenziare l' equazion della curva non ommettere le poteſtà ſuperiori di dx, e dy, a fine di rintracciare col loro mezzo la ragione ultima, che non può in tal caſo eſſere ſomminiſtrata dal rapporto di dx a dy. Ed ecco il perchè ho detto, che avendoſi $dx : dy :: 0 : 1$, la ragione di dx a dy è minore di qualunque aſſegnabile, o pur tale è la ragione di $dy : dx$ qualora è $dy : dx :: 0 : 1$, mentre il primo termine della ſeconda ragione non è un zero aſſoluto, ma ſotto di lui ſi occultano differenziali più alti, che nel comun modo di differenziare ſono ſtati ommeſſi.

AR-

Digitized by Google

ARTICOLO IV.

Dei massimi, e dei minimi.

306. GEneralmente sotto il nome di massimi, e di minimi vengono quelle quantità variabili, che o acquistando continui successivi aumenti crescono fino a un tal segno, dopo del quale continuamente van decrescendo, o patendo continui successivi decrementi calano fino a un certo grado, dopo del quale cominciano a crescere, e a farsi susseguentemente maggiori. Si chiamano massime allorchè sono giunte al massimo grado d'aumento, e pel contrario si dicono minime quando si trovano nell'ultimo grado di decremento. Come a cagion d'esempio se nella curva MGN [Fig. 25.] col crescere l'abscissa A B crescerà ancora l'ordinata BE per modo, che quando l'abscissa è AD, l'ordinata DG abbia acquistato il massimo aumento, dopo del quale crescendo ancora l'abscissa, e passando ad essere AL, essa cali, e diventi LK, l'ordinata DG si dirà la massima; *Vice versa* nella curva LGF [Fig. 24.], se col crescere l'abscissa AB, andrà calando l'ordinata BE, così che quando l'abscissa è AD, l'ordinata DG sia giunta all'ultimo grado di diminuzione, dopo il quale crescendo l'abscissa, e divenendo AC, cresca eziandio l'ordinata CH, l'ordinata DG si dirà la minima. Così nella curva ABE (Fig. 29.) DB è massima ordinata, e GE è minima.

307. Per determinare queste massime, e minime ordinate, osserviamo cosa succeda nella curva allora quando un'ordinata diventa massima, o minima. Nelle curve EGH, EGK [Fig. 24. 25.] sia AB l'abscissa $=x$, e BE l'ordinata $=y$. Al punto E si conduca tangente la E T, e infinitamente prossima all'ordinata BE si tiri *be*, poscia si conduca E*a* parallela all'asse delle abscisse. Giusta le cose altre volte dette sono simili i due triangoli E*ae*, EBT, dai quali si raccoglie, che l'elemento dell'ordinata sta all'elemento dell'abscissa, come l'ordinata alla sottotangente. Ciò posto si supponga, che l'ordinata BE scorrendo sempre parallela a se stessa su l'asse AD delle abscisse si vada continuamente accostando alla DG. Egli è evidente, che quanto più l'ordinata BE si accosta alla DG massima, o minima, tanto maggiore diventa la sottotangente, la quale finalmente diventa infinita, allorchè la BE è passata in DG, o sia allorchè l'ordinata è divenuta massima, o minima. Ma la sottotangente presa su l'asse delle abscisse non diventa infinita, se non in caso, che la tangente si faccia parallela all'asse delle abscisse. Dunque in questo caso la tangente, che passerà per l'estremità della massima, o minima ordinata sarà parallela all'asse delle abscisse.

308. Non però, si può *vice versa* concludere, che l'ordinata debba essere una massima, o una minima, sempre che la tangente, che passa per la di lei estremità, è parallela all'asse delle ordinate. Di fatto se l'ordinata andrà a terminare a un punto di flesso, come C, [Fig. 30.] o a un punto di regresso, come C [Fig. 31.], e i due rami della cur-

va

va si rivoltino la convessità, la tangente a questo punto sarà parallela all' asse delle absciffe, come FG alla AB (Fig. 30.), ed FC alla AB (Fig. 31.), nè però l' ordinata BC corrispondente al punto C sarà una massima, o una minima. Laddove l' ordinata a un punto di regresso potrà essere una massima, o una minima, se la concavità di un ramo della curva sarà rivoltato verso la convessità dell' altro ramo, come si può vedere nelle Fig. 32., e 33.

309. Divenendo adunque infinita la sottotangente tosto che l' ordinata passa ad essere una massima, o una minima, nel caso di una massima, o minima ordinata, la sottotangente all' ordinata avrà ragione infinita: Ma la sottotangente sta all' ordinata, come dx a dy, dunque anche dx a dy avrà ragione infinita, e però dy sarà nulla rispetto alla dx, cioè sarà $dy = 0$ nel punto della massima, o minima ordinata.

310. Nel passare, che fa un' ordinata ad essere massima, o minima, non solo può succedere, che dx a dy abbia ragione infinita, ma può succedere ancora *vice versa*, che infinita diventi la ragione di dy, a dx. Nelle due curve GMA (Fig. 34. 35.) sia QP l' absciffa $= x$, PM l' ordinata $= y$, alla quale si conduca infinitamente prossima l' ordinata pm. Al punto M si tiri la tangente BM, e dal punto stesso M la Mn parallela all' asse PB delle absciffe. Ciò posto è manifesto, che quanto più l' ordinata PM si accosterà alla massima, o minima ordinata CA, altrettanto minore si andrà facendo la sottotangente BP, così che quando PM sarà passata in CA, cioè sarà divenuta la massima, o la minima ordinata, la tangente divenendo parallela all' asse delle ordinate, la sottotangente si farà nulla. In tal caso adunque l' ordinata alla sottotangente avrà una ragione infinita: Ma l' ordinata sta alla sottotangente, come $mn\ (= dy)$ ad $Mn\ (= dx)$; quindi anche dy a dx avrà ragione infinita, conseguentemente nel punto della massima, o della minima ordinata sarà $dy = \infty$, e $dx = 0$. Concludiamo adunque, che quando la tangente condotta al punto della curva, cui va a terminare la massima, o minima ordinata, è parallela all' asse delle absciffe, devesi fare $dy = 0$, e quando è parallela all' asse delle ordinate, si deve fare $dy = \infty$.

311. A fine di determinare pertanto le massime, o le minime ordinate, si deve supporre o $dy = 0$, o $dy = \infty$ (nel qual caso è $dx = 0$) nella differenziata equazione della curva, di cui si vuol trovare la massima, o la minima ordinata. Data essendo adunque l' equazion della curva, essa si differenzi, indi si prenda il rapporto $\frac{dy}{dx}$. In questo rapporto si faccia $dy = 0$, ovvero $dy = \infty$; lo che ridurrà l' equazione a un certo numero di termini immuni da differenziali: da questi termini si ricavi il valore della x, che sarà l' absciffa, cui competerà la massima, o la minima ordinata y. Che se poi nell' equazione data si sostituirà questo trovato valore di x, si otterrà finalmente il valore di y, che è la massima, o la minima ordinata cercata.

312. Si osservi, che nel fare $dy = 0$, il valore di x si deve prendere su l' asse delle absciffe, laddove si deve prendere su l' asse delle ordinate, quando si fa $dy = \infty$, cioè a dire nella supposizione di $dy = \infty$ la x fa la figura d' ordinata, se nell' altra supposizione di $dy = 0$ la faceva la y.

313.

313. Ho detto, che la supposizione di $dy=0$, ovvero di $dy=\infty$ dà una massima, o una minima ordinata: Ma per distinguere in ispecie se ella è una massima, o una minima, si osservi, che le sottotangenti corrispondenti a due punti della curva, uno al di quà, e l'altro al di là della massima, o della minima, hanno posizioni opposte, così che se l'ordinata è una massima, la sottotangente corrispondente a un punto della curva posto al di quà della massima è positiva, e al contrario è negativa, se compete a un punto posto al di là della massima; che se l'ordinata sarà una minima, la sottotangente corrispondente a un punto della curva posto al di quà della minima sarà negativa, e all'opposto sarà positiva, se ella competerà a un punto posto al di là della minima. Onde dopo aver trovato il valore di y nel modo detto al num. 311, per conoscere se questa y è una massima, o una minima, si prendano ad arbitrio due punti su la curva, uno al di quà, e l'altro al di là della ritrovata ordinata, e [giusta il num. 242.] si prendano le sottotangenti, che competono a questi due punti. Se la sottotangente, che compete al punto posto al di quà della y sarà positiva, e in conseguenza la sottotangente, che conviene al punto posto al di là sarà negativa, la y sarà una massima: Se poi la sottotangente, che corrisponde al punto posto al di quà della y sarà negativa, e positiva la sottotangente, che compete al punto posto al di là, la y sarà una minima.

314. La considerazione della situazione della sottotangente somministra ancora la maniera di scoprire l'inganno, a cui ci conduce alle volte la supposizione di $dy=0$, mentre ci mentisce un massimo, o un minimo, ove non è, e perchè ciò accade ne' punti di flesso, e di regresso, come si è veduto al num. 308., nei quai casi la tangente è parallela all'asse delle absciffe, osserviamo primieramente rispetto ai punti di flesso quali siano le posizioni delle sottotangenti, che competono a due punti presi su la curva, uno al di quà, e l'altro al di là del punto di flesso. Basta osservare la Fig. 30. per rilevare, che comunque su la curva DCE si prendano due punti, uno al di quà, l'altro al di là del punto C, le sottotangenti, che competono a questi due punti, cadranno da una stessa parte, cioè saranno (secondo la posizion della curva) o tutte due positive, o tutte due negative, quando (pel preced. num. 313.) se BC fosse una massima, o una minima, e però il punto C non fosse un flesso, una di loro dovrebbe essere positiva, e l'altra negativa. Quindi per assicurarsi se la supposizione di $dy=0$ dia veramente un massimo, o un minimo, e tale sia la ritrovata ordinata, si determinino [giusta il num. 242.] le due sottotangenti, che competono a due arbitrarj punti della curva presi uno al di quà, e l'altro al di là della ritrovata ordinata, e si osservi se sono affette dallo stesso, o da diversi segni. Se saranno affette dallo stesso segno, il punto, cui corrisponde la detta ordinata sarà un flesso, e tale ordinata nè sarà massima, nè minima; laddove sarà una massima, o una minima a norma del num. 313., se le due sottotangenti saranno affette da segni contrarj.

315. Quanto ai punti di regresso si noti in primo luogo, che tutte le ordinate alla curva cadono da una sola parte dell'ordinata BC (Fig. 31., 32., 33.) esibitaci dalla supposizione di $dy=0$, e dall'altra parte siccome la curva, così le ordinate sono immaginarie: In secondo luogo che a una qualunque absciffa competono due ordinate ineguali, che danno due punti su due rami della curva; così all'absciffa AK convengono le due ordinate ineguali Ka, Kb. Ora se i due rami della curva si volteranno le convessità, come nella *fig.* 31, le due sottotangenti, che

che competeranno ai punti a, b, faranno affette da fegni contrarj: Ma fe della curva un ramo rivolgerà la concavità verfo la conveffità dell'altro, come nelle [*Fig.* 32., 33.], le due tangenti, che convengono ai punti a, b, faranno affette dallo fteffo fegno. Pofto ciò per accertarfi fe la fuppofizione di $dy = 0$ dà, o non dà un maffimo, o un minimo, fi ricerchi fe alla curva competono ordinate tanto al di quà, che al di là della ritrovata ordinata BC. Se sì, la BC potrà effere una maffima, o una minima, o non effere nè maffima, nè minima, fecondo che il punto C non è, o pure è un punto di fleffo, lo che fi efaminerà nel modo efpofto al precedente num. 314.: Se nò, fi cerchino le fottotangenti, che competono ai punti a, b, e fe quefte due fottotangenti faranno affette da fegni diverfi, la BC nè farà un maffimo, nè un minimo, e all'oppofto farà un maffimo, o un minimo, fe le due fottotangenti faranno affette dallo fteffo fegno. Per diftinguere in oltre fe la BC è un maffimo, o un minimo, fi prenda l'ordinata Kb, e fi veda fe effa è maggiore, o minore della BC: Effendo $Kb > BC$, la BC farà un minimo, e vice verfa farà un maffimo in cafo, che fia $Kb < BC$.

316. Cercafi fe alla curva ABCD [*Fig.* 36], nella quale AC è l'affe delle abfciffe, il punto C l'origine delle coordinate, e di cui l'equazione è $y^4 + 4axy^2 + 4a^2x^2 - 8a^3x = 0$, competono maffime, o minime ordinate, e quali fono. Si differenzi quefta equazione, e fi avrà $4y^3dy + 4ay^2dx + 8axydy + 8a^2xdx - 8a^3dx = 0$, donde ricavando il valore di $\frac{dy}{dx}$, ne viene $\frac{dy}{dx} = \frac{8a^3 - 8a^2x - 4ay^2}{4y^3 + 8axy}$. Si faccia $dy = 0$, con che l'equazione rifultando

$$\frac{0 \times \overline{4y^3 + 8axy}}{dx} = 8a^3 - 8a^2x - 4ay^2,$$

fi ridurrà ad $8a^3 - 8a^2x - 4ay^2 = 0$, o fia [A] $2a^2 - 2ax - y^2 = 0$. Dall'equazione propofta fi prenda il valore di y^2, che è [B] $y^2 = -2ax + 2a\sqrt{2ax}$, che foftituito nell'equazione [A] la riduce alla feguente $2a^2 - 2ax + 2ax - 2a\sqrt{2ax} = 0$, cioè $2a^2 - 2a\sqrt{2ax} = 0$; Se da quefta equazione fi prenderà il valore di x, fi troverà effere $x = \frac{1}{2}a$, poichè elevando al quadrato la detta equazione, ne viene $4a^4 = 8a^3x$, e

pe-

però $x = \frac{1}{2} a =$ CE. Dunque l'ordinata, che deve essere la massima, o la minima, lo che determineremo fra poco, si deve alzare dall'estremità E dell'abscissa CE $= \frac{1}{2} a$. Ora per ritrovare il valore di questa ordinata sostituisco nell' equazione data $\frac{1}{2} a$ in luogo di x, lo che la riduce alla seguente $y^4 + 2a^2y^2 + a^4 = 4a^4$, da cui estraggo la radice quadrata, a fin di avere il valore di y, e ciò facendo ritrovo $y = \pm a$. Quindi all' abscissa CE competono due opposte ordinare eguali EB $=$ ED $= a$, che sono le ricercate massime, o minime. Se siano o massime, o minime si può determinare mediante il num. 313., nel qual modo operando si trova, che sono due massime: In appresso darò altro modo di distinguerle. In vece di prendere dall' equazione data il valore di y^2, per sostituirlo nell'equazione [A], si poteva *vice versa*, lo che molte volte tornerà più comodo, prendere il valore di y^2, e sostituirlo nell' equazione proposta, e ciò facendo ne verrà $4a^4 - 8a^3x + 4a^2x^2 + 8a^3x - 8a^2x^2 + 4a^2x^2 - 8a^3x = 0$, che si riduce a $4a^4 - 8a^3x = 0$, da cui prendendo il valore di x, si trova essere come prima $x = \frac{1}{2} a$. Intanto vediamo se questa curva ha minime. Riprendo l' equazione differenziata $4y^3dy + 4ay^2dx + 8axydy + 8a^2xdx - 8a^3dx = 0$, o sia $\frac{dy}{ax} = \frac{8a^3 - 8a^2x - 4ay^2}{4y^3 + 8axy}$, e faccio $dy = \infty$, onde avendosi $\infty \times \overline{4y^3 + 8axy} = dx \times \overline{8a^3 - 8a^2x - 4ay^2}$, l' equazione si riduce a $y^2 + 2ax = 0$, in cui sostituendosi il valore di y^2, che è $2a\sqrt{2ax} - 2ax$, ne viene $2a\sqrt{2ax} - 2ax + 2ax = 0$, vale a dire $2a\sqrt{2ax} = 0$. Dunque $x = 0$, e però la minima ordinata si ritrova all'origine delle coordinate, lo che per altro si dice impropriamente.

317. Cerchiamo in secondo luogo se alla curva DCE (*Fig.* 30.), il di cui asse delle abscisse è AB, l'origine delle coordinate il punto A, e la di cui equazione è $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - y - a^3 + a = 0$, convengono massime, o minime ordinate. Col differenziare questa equazione ritrovo $\overline{3x^2 - 6ax + 3a^2} \times dx -$ dy

$dy = 0$, e però $3x^2 - 6ax + 3a^2 = \frac{dy}{dx}$. Faccio $dy = 0$, e con ciò l'equazione si riduce ad $x^2 - 2ax + a^2 = 0$, da cui prendendo il valore di x, si ha $x = a$, il qual valore di x sostituito nell'equazione proposta la riduce ad $a^3 - 3a^3 + 3a^3 - y - a^3 + a = 0$, cioè $y = a$. Adunque se la curva ha una massima o minima ordinata, essa è eguale ad a, e compete all'abscissa AB $= a$. Ma se a norma del num. 314. esamineremo la natura di questa ordinata BC, troveremo, che essa nè è massima, nè minima, quantunque al punto C, cui termina l'ordinata, la tangente FG sia parallela all'asse delle abscisse, poichè il punto G della curva è punto di flesso.

318. Quantunque gli indizj indicati ai num. 313., 314., 315. possano bastare per conoscere se un'ordinata è massima, o minima, ovvero se non è massima, nè minima, pure soggiungerò un altro metodo facilissimo per accertarsi tanto di un caso, che dell'altro. Per le cose dette rendesi manifesto, che se y sarà una funzione di x, e che essa diventi un massimo, allorchè si fa $x = a$, cioè sia $y = A$ [con A rappresento il massimo valore di y], sarà $y < A$ tanto con fare $x = a + n$ [per n intendo una quantità minima], che con fare $x = a - n$. Parimente se y acquisterà un valor minimo $= B$ in caso di $x = a$, sarà sempre $y > B$ tanto in caso di $x = a + n$, che di $x = a - n$. La cosa si può vedere chiaramente quanto al primo caso nella *fig.* 25., in cui all'abscissa AD corrisponde la massima ordinata DG: Se si prenderanno altre due abscisse, una minore, e l'altra maggiore di AD, come AB, AL, l'una, e l'altra delle loro corrispondenti ordinate BE, LK, sarà minore di DG. Nella fig. poi 32., in cui all'abscissa AB corrisponde la massima ordinata BC, se si prenderà un'altra abscissa minore AK, ognuna delle due ordinate Ka, Kb sarà minore di BC. Rispetto al secondo caso basta osservare la fig. 24. per rilevare, che all'abscissa AD corrispondendo la minima ordinata DG, se si prenderanno altre due abscisse AB, AC, una minore, e l'altra maggiore di AD, ciascuna delle ordinate BE, CH corrispondenti a tali abscisse sarà maggiore della minima ordinata DG: Parimente nella fig. 33., nella quale all'abscissa AB compete la minima ordinata BC, se si prenderà una qualunque altra abscissa minore AK, ognuna delle ordinate Ka, Kb a lei corrispondenti sarà maggiore della minima ordinata BC. Ma se con fare $x = a$ ne sarà venuto Q pel valore di y, e poscia con fare $x = a + n$ si trovi un valore di $y > Q$, e con fare $x = a - n$ ne venga un valore di $y < Q$, o *vice versa*, il valore Q non sarà nè un massimo, nè un minimo, come si può vedere nella fig. 30, rispetto alla quale si è trovato BC [al num. 308.] pel valore di y nell'ipotesi di $dy = 0$, la quale BC per altro nè è un massimo, nè un minimo, perchè se si prenderanno altre due abscisse AO, AH, una minore, e l'altra maggiore di AB, sarà Oa, corrispondente ad AO, minore, ed Hb, corrispondente ad AH, maggiore di BC, lo che dimostra, che l'ordinata BC non è una massima, nè una minima: Lo stesso si può osservare nella fig. 31., nella quale prendendo una qualunque abscissa AK minore di AB, delle due ordinate a lei corrispondenti una Ka è minore, l'altra Kb è maggiore di BC. Quindi essendo y una funzione di x, che acquista un valore reale, qualunque sia il valore, che si dà ad x, se con x si rappresenterà il valore, che fa divenire la y un massi-

mo,

Digitized by Google

mo, o un minimo, indi si sostituisca $x \pm n$ in luogo di x, ciascuno dei due valori di y nati da questa sostituzione sarà nel primo caso minore di quello sia allorchè è $n = 0$, e nel secondo caso sarà maggiore: Ma se il valore di x non renderà la y un massimo, o un minimo, in tal caso la sostituzione di $x + n$ farà divenir la y maggiore, e la sostituzione di $x - n$ la farà divenir minore di quello, che la rendesse il valore di x.

319. Al num. 126. si è veduto, che con sostituire $x + n$ in luogo di x in una funzione y, tale funzione y diventa $y + \frac{ndy}{dx} + \frac{n^2d^2y}{2\,\overline{dx}^2} + \frac{n^3d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \frac{n^4d^4y}{24\,\overline{dx}^4} +$ ec., e col sostituire $x - n$ in vece di x, la funzione y diventa (giusta il num. 127.) $y - \frac{ndy}{dx} + \frac{n^2d^2y}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \frac{n^4d^4y}{24\,\overline{dx}^4} -$ ec.: Onde nel caso di un massimo deve essere $y > y + \frac{ndy}{dx} + \frac{n^2d^2y}{2\,\overline{dx}^2} + \frac{n^3d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \frac{n^4d^4y}{24\,\overline{dx}^4} +$ ec., e $y > y - \frac{ndy}{dx} + \frac{n^2d^2y}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \frac{n^4d^4y}{24\,\overline{dx}^4} -$ ec.: Nel caso poi di un minimo ha da

esse-

essere $y < y + \frac{ndy}{dx} + \frac{n^2d^2y}{2\,\overline{dx}^2} + \frac{n^3d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \frac{n^4d^4y}{24\,\overline{dx}^4} + \text{ec.},$

e $y < y - \frac{ndy}{dx} + \frac{n^2d^2y}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \frac{n^4d^4y}{24\,\overline{dx}^4} - \text{ec.}$. Laddove nel caso nè di un massimo, nè di un minimo sarà $y > y + \frac{ndy}{dx} + \frac{n^2d^2y}{2\,\overline{dx}^2} + \frac{n^3d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \frac{n^4d^4y}{24\,\overline{dx}^4} + \text{ec.}$, e $y < y - \frac{ndy}{dx} + \frac{n^2d^2y}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \frac{n^4d^4y}{24\,\overline{dx}^4} - \text{ec.}$, o *vice versa*. Adunque poichè nel caso di un massimo, o di un minimo è $\frac{dy}{dx} = 0$, ogni qualvolta sarà proposto di ritrovare, se una curva, di cui è data l'equazione ha massime, o minime ordinate, si differenzi tale equazione, indi si prenda $\frac{dy}{dx} = 0$, e da questa equazione si ricavino tutti i valori di x, che serviranno a ravvisare, se la funzione di y diventa un massimo, o un minimo, o pur nè l'uno, nè l'altro. Sia per esempio a uno dei valori di x, che si ricava dall' equazione $\frac{dy}{dx} = 0$. Col sostituire a in luogo di x, la funzione y

di-

Digitized by Google

diventi $= M$, e le espressioni $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ec. risultino $\frac{d^2y}{dx^2} = p$,

$\frac{d^3y}{dx^3} = q$, $\frac{d^4y}{dx^4} = r$, $\frac{d^5y}{dx^5} = s$ ec.. Poichè $\frac{dy}{dx} = o$, col sostituire

$a + n$ in luogo di x, si avrà (P) $M + \frac{1}{2} n^2 p + \frac{1}{6} n^3 q + \frac{1}{24} n^4 r +$

$\frac{1}{120} n^5 s +$ ec., e con sostituire $a - n$ in vece di x, ne verrà

(Q) $M + \frac{1}{2} n^2 p - \frac{1}{6} n^3 q + \frac{1}{24} n^4 r - \frac{1}{120} n^5 s +$ ec.. Ora da queste due espressioni, secondo che o l'una, e l'altra è minore di M, che è il caso di un massimo; o l'una, e l'altra è maggiore di M, che è il caso di un minimo; o una maggiore, e l'altra minore di M, che è il caso nè di un massimo, nè di un minimo, tutta dipende la maniera di conoscere quando si ha un massimo, o un minimo, ovver nè l'uno, nè l'altro.

320. Esaminiamo pertanto quali siano i casi, ne' quali (P), e (Q) è minore di M; ovvero (P), e (Q) è maggiore di M; o finalmente (P) minore di M, e (Q) maggiore di M, o *vice versa*. Primieramente la lettera n rappresenti una quantità minima, e $\frac{d^2y}{dx^2} = p$ sia quantità positiva, egli è evidente, che tanto (P), come (Q) sarà maggiore di M, conseguentemente quando la quantità rappresentata da p è positiva, il valore M, che acquista la funzione y col porre $x = a$, è un minimo: Ma se la quantità rappresentata da p è negativa, sarà tanto (P), che (Q) minore di M, e per conseguenza la funzione y darà un massi-

mo.

mo. In secondo luogo sia $p = o$, e $\frac{d^3y}{dx^3} = \pm q$ esibisca una quantità qualunque: Sarà adunque (P) maggiore di M, e (Q) minore di M avendo luogo il segno superiore, e *vice versa* valendo il segno inferiore, e però (pel num. 318.) il valore M, che acquista la funzione y col porre $x = a$, nè sarà un massimo, nè un minimo. In terzo luogo sia $p = o$, $q = o$, e $\frac{d^4y}{dx^4} = r$ sia quantità positiva: Egli è chiaro, che in tale ipotesi sarà tanto [P], che [Q] maggiore di M, onde il valore M, che acquista la funzione y col porre $x = a$, risulta un minimo; che se la quantità rappresentata da r sarà negativa, ella renderà tanto (P), che (Q) minore di M, e in conseguenza il valore di M sarà un massimo. In quarto luogo sia $p = o$, $q = o$, $r = o$, e $\frac{d^5y}{dx^5} = \pm s$ sia una qualunque quantità; in tal caso avendo luogo il segno superiore sarà [P] maggiore di M, e [Q] minore di M, e *vice versa* valendo il segno inferiore; onde il valore di M risultante dalla funzione y nè sarà un massimo, nè un minimo. Le stesse considerazioni si facciano su gli altri valori di $\frac{d^6y}{dx^6}$, $\frac{d^7y}{dx^7}$ ec., qualora vadano a zero i precedenti. Ciò posto adunque se si dovrà giudicare del massimo, o del minimo dal valore di p, ovvero dal valore di r divenendo $p = o$, $q = o$, o pure dal valore di t a motivo di essere $p = o$, $q = o$, $r = o$, $s = o$ ec., si offervi se il valore di p, o di r, o di t ec., è positivo, ovvero negativo: Se è positivo, il valore di M somministra un minimo; e se egli è negativo, il valore di M dà un massimo. Che se risultando $p = o$, resterà un qualunque valore di q; o pure essendo $p = o$, $q = o$, $r = o$, resterà il valore di s, ovvero divenendo $p = o$, $q = o$, $r = o$, $s = o$, $t = o$, resterà il valore di u ec., il valore di M nè sarà un massimo, nè un minimo.

321. Poichè giusta le cose dette di sopra per ritrovare i massimi, o i mini-

mi si deve porre $\frac{dy}{dx} = 0$, indi da questa equazione si deve prendere il valore di x, che è una di lei radice, la quale porta al massimo, o al minimo cercato, devesi perciò aver riguardo a queste radici, per poter giudicare dell' esistenza, o non esistenza de' massimi, e minimi, avvegna che se l'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$, avrà un numero pari di radici eguali, cioè o due, o quattro, o sei ec., il valore di M non potrà essere nè un massimo, nè un minimo, laddove sarà o l'uno, o l' altro, se il numero delle radici eguali, che ha l'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$ sarà impari: E la ragione si è, perchè se l'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$ avrà due radici eguali, sarà in tal caso $\frac{d^2y}{dx^2} = p = 0$; se ne avrà quattro, sarà $\frac{d^2y}{dx^2} = p = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = q = 0$, $\frac{d^4y}{dx^4} = r = 0$ ec., che (pel precedente num. 320.) sono i casi, ne' quali il valore di M nè è un massimo, nè un minimo. Che poi risulti $p=0$ qualora l'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$ ha due radici eguali, e si abbia $p=0$, $q=0$, $r=0$ se ne ha quattro ec., vediamolo nei due seguenti esempj.

322. Essendo data l'equazione $y = 3x^3 + 3x^2 + x + 5$, cercansi i casi, ne' quali l'ordinata y diventa un massimo, o un minimo. Si differenzi replicatamente l'equazione data, e si trovino i valori di

$\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, che sono i seguenti $\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 6x + 1$,

$\frac{d^2y}{dx^2} = 18x + 6$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 18$. Si faccia $\frac{dy}{dx} = 0$, e ne verrà $9x^2 + 6x$

$+ 1 = 0$, la quale equazione ha due radici eguali, che sono $x = -\frac{1}{3}$,

$x = -\frac{1}{3}$. Sostituendosi questo valore di x nell' espressione $\frac{d^2y}{dx^2} = 18x + 6$,

ne viene $\frac{d^2y}{dx^2} = -6 + 6 = 0$. Ed ecco, che l' avere l' equazione $\frac{dy}{dx} = 0$

due radici eguali, ha reso $\frac{d^2y}{dx^2} = p = 0$, che è uno de' casi di niun massimo,

o minimo.

323. Sia proposta in secondo luogo l' equazione $y = \frac{16}{5}x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 4x^2 + x - 3$, e si debbano ritrovare i casi, ne' quali l' ordinata y diventa un massimo, o un minimo. Si differenzi replicatamente al solito l' equazione data, e si ritrovino i valori di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d\,y}{dx^5}$, che sono i seguenti.

$$\frac{dy}{dx} = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 64x^3 - 96x^2 + 48x - 8$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 192x^2 - 192x + 48$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 384x - 192$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 384$$

Si faccia $\frac{dy}{dx} = 0$, e si avrà $16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 = 0$, la quale equazione ha quattro radici eguali, ognuna delle quali è $x = \frac{1}{2}$. Si faccia pertanto la sostituzione di questo valore di x nelle espressioni di $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec., e fatto ciò si troverà $\frac{d^2y}{dx^2} = 8 - 24 + 24 - 8 = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 48 - 96 + 48 = 0$, $\frac{d^4y}{dx^4} = 192 - 192 = 0$. Ed ecco che le quattro radici eguali dell' equazione $\frac{dy}{dx} = 0$ hanno fatto $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, che è un altro caso di niun massimo, o minimo.

324. Si è veduto al num. 317, che se la curva rappresentata dall' equazione $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - y - a^3 + a = 0$ ha una massima ordinata, essa deve essere $y = a$. Per accertarsi se sia tale, si differenzi l' equazione proposta, e si ritrovino

i valori di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, che sono $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6ax + 3a^2$;

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6a$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$. Si faccia $\frac{dy}{dx} = 0$, e si avrà

$3x^2 - 6ax + 3a^2 = 0$, o sia $x^2 - 2ax + a^2 = 0$, che ha due radici eguali, ognuna delle quali è $x = a$. Si sostituisca questo valore di x nell' espressione

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6a$, con che essa diverrà $\frac{d^2y}{dx^2} = 6a - 6a = 0$, lo che fa

vedere, che l'ordinata $y = a$ non è un massimo, nè un minimo, come si poteva credere.

325. Per vedere in pratica come si prevalga della regola data a distinguere i massimi dai minimi, si debba trovare se la curva DCE [*Fig.* 37.], che ha AH per asse delle abscisse, AF per quello delle ordinate, delle quali coordinate il punto A è l'origine, e di cui l' equazione è $x^2 + 2cx - ay + c^2 + ab = 0$, ha massime, o minime ordinate. Si differenzi questa equazione, e si trovi l' espressione

$\frac{dy}{dx}$. Ciò facendo si ottiene $2x\,dx + 2c\,dx - a\,dy = 0$, da cui si ricava

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2c}{a}$. Si eguagli a zero questo valore, a fine di trovare il valore

di x, che, con fare $\frac{2x + 2c}{a} = 0$, si trova essere $x = -c$. Dunque se la curva ha una massima, o minima ordinata, essa compete all' abscissa $AB = -c$. Per trovare il valore di questa ordinata, si sostituisca $-c$ in luogo di x nella data equazione $x^2 + 2cx - ay + c^2 + ab = 0$, con che diverrà $c^2 - 2c^2 - ay + c^2 + ab = 0$, dalla

dalla quale si ricava $y=b$, vale a dire l' ordinata cercata è $=b$. Per conoscere se questa è una massima, o una minima, differenzio l' equazione $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2c}{a}$ (ritenendo al solito dx costante), e mi viene $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2}=\frac{2}{a}$. Dunque perchè questo valore di $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2}$ è positivo, concludo a norma del num. 320, che l' ordinata $BC=b$ è una minima.

326. Nello stesso modo al num. 316. si sarebbe determinato se le due ordinate $y=\pm a$, che corrispondono all' abscissa $x=\frac{1}{2}a$ sono massime, o minime. Di fatto mediante $y^4+4axy^2+4a^2x^2-8a^3x=0$ data equazione alla curva, si trovi l' espressione di $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2}$ con differenziare l' equazione

$4y^3dy+4ay^2dx+8axydy+8a^2xdx-8a^3dx=0$, da cui si è preso $\frac{dy}{dx}=0$, lo che facendo, con ritenere dx costante, si ha

$$12y^2\overline{dy}^2+4y^3d^2y+8aydydx+8aydxdy+8ax\overline{dy}^2+8axyd^2y+8a^2\overline{dx}^2=0,$$

che divisa per $\overline{dx}^2$ diventa $\frac{12y^2\overline{dy}^2}{\overline{dx}^2}+\frac{4y^3d^2y}{\overline{dx}^2}+\frac{16aydydx}{\overline{dx}^2}+$

$\frac{8ax\overline{dy}^2}{\overline{dx}^2}+\frac{8axyd^2y}{\overline{dx}^2}+8a^2=0$: Ma i termini $\frac{12y^2\overline{dy}^2}{\overline{dx}^2}$, $\frac{16aydydx}{\overline{dx}^2}$,

 8 a-

Digitized by Google

$-\frac{8ax\,\overline{dy}^2}{\overline{dx}^2}$ vanno a zero, perchè ognun di loro è moltiplicato per $\frac{dy}{dx} = 0$,

dunque l'equazione si riduce a $\frac{4y^3\,d^2y}{\overline{dx}^2} + \frac{8axy\,d^2y}{\overline{dx}^2} + 8a^2 = 0$, da cui si ricava $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} = \frac{-8a^2}{4y^3 + 8axy}$. E perchè si è trovato $x = \frac{1}{2}a$, $y = a$, con sostituire questi valori ne viene $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} = \frac{-8a^2}{4a^3+4a^3} = \frac{-1}{a}$ valor negativo, il qual fa vedere, che le ritrovate ordinate sono due massime.

327. Può alle volte accadere che le radici dell'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$ siano immaginarie, lo che sarà segno, che la curva non ha nè massime, nè minime ordinare. Tale è la curva GDH [*Fig.* 38.], della quale l'asse delle abscisse è EF, quello delle ordinate è BC, e l'equazione è $x^3 - x^2 - 3y + 2x - 5 = 0$. Col prendere da questa equazione il valore di $\frac{dy}{dx}$, e farlo eguale a zero, si ha

$\frac{3x^2 - 2x + 2}{3} = 0$, le di cui radici sono $x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{5}{9}}$, che trovandosi immaginarie fanno vedere, che la proposta curva non ha nè massime, nè minime ordinare, come si rileva dalla sola ispezione della figura. Lo stesso dicasi in caso, che risulti immaginario il valore di y, che ricavasi dall'equazione data, allorchè vi si sostituisce il valore di x preso dall'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$.

328.

Digitized by Google

328. Dalle cose dette al num. 315. si scorge abbastanza, che per determinare se l'ordinata corrispondente a un punto di regresso, come l'ordinata BC, (*Fig.* 32, 33.) è una massima, o una minima, devesi alquanto variare il calcolo usato finora rispetto a un qualunque altro punto della curva, poichè rispetto a un punto di curva, che non sia di regresso, l'ordinata sarà una massima, se le di lei contigue ordinate, una a destra, e l'altra a sinistra, saranno amendue minori di lei; e *vice versa* se saranno maggiori, l'ordinata sarà una minima. Ma perchè l'ordinata a un punto di regresso è l'ultima delle ordinate reali, in cui due ordinate si confondono, e diventano eguali, e al di là di questa ordinata tutte le altre diventano immaginarie, ben si vede, che da due ordinate poste una a destra, e l'altra a sinistra della medesima non si può prendere il giudizio del di lei valore massimo, o minimo, ma devesi necessariamente ripetere da due ordinate esistenti da uno stesso lato, le quali indicheranno un'ordinata massima, se di lei ambe saranno minori, e pel contrario indicheranno una minima, se saranno ambe maggiori.

329. In queste curve pertanto a qualsivoglia absciffa x devono corrispondere due ordinate, che secondo i varj valori della x sono reali, o immaginarie, ed essendo reali sono ineguali fino al punto di regresso, ove confondendosi in una, diventano eguali: Adunque se nel caso di $x > a$ le ordinate corrispondenti ad x saranno immaginarie, e nel caso di $x = a$ saranno eguali, onde sia $y = b$, esse saranno reali solamente nel caso di $x < a$, nel qual caso se l'una, e l'altra di queste due ordinate sarà maggiore di b, la b sarà un'ordinata minima; se l'una, e l'altra ne sarà minore, la b sarà un'ordinata massima.

330. Per determinare i casi, ne' quali queste ordinate sono ambe maggiori, o ambe minori dell'ordinata b, si prenda in generale l'equazione

$y = b \pm \sqrt{\overline{a - x}^3 \times b}$, dove b, b sono funzioni di x non divisibili per $a - x$, ed b è una quantità positiva. Questa equazione col fare $x = a$ si riduce a $y = b$, e però le due ordinate si confondono in una sola, laddove diventano immaginarie col fare $x > a$. Adunque per determinare se l'ordinata b è una massima, o una minima, poniamo x alquanto minore di a, e osserviamo se i valori di y risultano ambi maggiori, o ambi minori di b. Si ponga pertanto $x = a - n$ (colla lettera n disegno una quantità minima, rispetto alla quale le altre di lei potestà superiori vanno a zero). Ora l'aver posto $x = a - n$ fa acquistare alla funzione

b la seguente forma $b - \frac{n\,db}{dx} + \frac{n^2\,d^2 b}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3\,d^3 b}{6\,\overline{dx}^3} +$ ec., e alla funzione b la seguente $b - \frac{n\,db}{dx} + \frac{n^2\,d^2 b}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3\,d^3 b}{6\,\overline{dx}^3} +$ ec.; per lo che

sostituendo nell'equazione data $a - n$ in luogo di x, e questi valori di b, b, si avrà il valore delle due ordinate y, che competono all'absciffa $x - n$, cioè

$y =$

$$y = b - \frac{n\,d\,b}{dx} + \frac{n^2\,d^2\,b}{2\,\overline{d\,x}^2} - \frac{n^3\,d^3\,b}{6\,\overline{dx}^3} \text{ ec.}$$

$$\pm\, n\sqrt{n \times b - \frac{n\,d\,b}{dx} + \frac{n^2\,d^2\,b}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3\,d^3\,b}{6\,\overline{dx}^3} + \text{ec.}}$$, vale a dire

$y = b - \frac{n\,d\,b}{dx} \pm n\sqrt{n\,b}$, perchè le poteſtà ſuperiori vanno a zero: Quindi ſe il valore di $\frac{db}{dx}$ ſarà poſitivo, i ritrovati valori di y ſaranno ambi minori di b, e *vice verſa* ſaranno maggiori, ſe il valore di $\frac{db}{dx}$ ſarà negativo; conſeguentemente l'ordinata b ſarà una maſſima, ſe il valore di $\frac{db}{dx}$ ſarà poſitivo; e ſe ſarà negativo, l'ordinata b ſarà una minima.

331. Può darſi il caſo, che $\frac{db}{dx}$ riſulti $= 0$, e in allora non ſi potrà traſcurare il ſuſſeguente termine $\frac{n^2\,d^2\,b}{2\,\overline{dx}^2}$, onde l'equazione, che dà i valori di y corriſpondente all'abſciſſa $x - n$ ſarà $y = b + \frac{n^2\,d^2\,b}{2\,\overline{dx}^2} \pm n\sqrt{n\,b}$, e queſti valori di y ſaranno ambi maggiori di b, ſe il valore di $\frac{d^2\,b}{\overline{dx}^2}$ ſarà poſitivo, nel qual caſo

l' or-

l' ordinata b sarà minima, laddove i detti valori di y saranno ambi minori di b qualora il valore di $\frac{d^2 b}{dx^2}$ sia negativo, e in questo caso l'ordinata b sarà massima.

Accadendo, che non solo sia $\frac{db}{dx} = 0$, ma ancora $\frac{d^2 b}{dx^2} = 0$, l'equazione che dà i valori di y corrispondenti ad $x - n$ sarà $y = b - \frac{n^3 d^3 b}{6 dx^3} \pm n \sqrt{n b}$; onde questi valori di y saranno ambi minori di b, e per conseguenza l' ordinata b una massima, sempre che il valore di $\frac{d^3 b}{dx^3}$ sia positivo; ma se sarà negativo, i valori di y saranno ambi maggiori di b, e questa ordinata b sarà minima. Ogniqualvolta avvenga, che non solo sia $\frac{db}{dx} = 0$, e $\frac{d^2 b}{dx^2} = 0$, ma ancora $\frac{d^3 b}{dx^3} = 0$, l' equazione che dà i valori di y corrispondenti ad $x - n$ sarà

$y = b + \frac{n^4 d^4 b}{d x^4} \pm n \sqrt{n b}$, la quale indicherà se l' ordinata b è massima, o minima, secondo che il valore di $\frac{d^4 b}{dx^4}$ è negativo, o positivo; e così in poi.

332. La forma delle equazioni a queste curve di regresso è in generale la seguente $y = b \pm \overline{a - x}^{2m} \sqrt[2q]{\overline{a - x} \times b}$, o sia $y = b \pm \sqrt[2q]{\overline{a-x}^{2m+1} \times b}$, e tali curve oltre la massima, o la minima ordinata al punto di regresso possono

avere

avere un' altra massima, o minima. Nella maniera pur ora esposta si determina se l'ordinata corrispondente al punto di regresso è una massima, o una minima; l'altra massima poi, o minima, che può competere a un qualunque altro punto della curva si determina a norma del num. 326. Per distinguere queste due spezie di massime, o minime, chiamerò queste ultime massime, o minime comuni, le altre poi le dirò massime, o minime singolari. Applichiamo le cose dette all'esempio.

333. Cercasi quali siano i valori di x, ai quali corrispondono massime, o minime ordinate nella curva (*Fig.* 44) rappresentata da questa equazione

$y^2 - \overline{2y + 3a^2} \times x - \overline{3a + 1} \times x^2 + x^3 - a^3 = 0$, e cercasi in oltre la spezie di queste massime, o minime. Per procedere con ordine vediamo primieramente se la curva ha massime, o minime comuni, dove sono, e quale è il loro valore. A tale effetto si differenzi l'equazione proposta, e si avrà

$2ydy - 2xdy - 2ydx + 3a^2dx - 6axdx + 2xdx + 3x^2dx = 0$, da cui si prenda il valore di $\frac{dy}{dx}$, che è (A) $\frac{dy}{dx} = \frac{+2y - 3a^2 + 6ax - 2x - 3x^2}{2y - 2x}$, che ritenendo la y, e dx costante si differenzi a fine di avere il valore di $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2}$, che trovasi essere $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} = \frac{6a - 2 - 6x}{2y - 2x} + 2 \times \frac{\overline{2y - 3a^2 + 6ax - 2x - 3x^2}}{\overline{2y - 2x}^2}$, che si riduce a [B] $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} = \frac{6a - 2 - 6x}{2y - 2x} = \frac{3a - 1 - 3x}{y - x}$, poichè il secondo termine $\frac{+2}{2y - 2x} \times \frac{\overline{2y - 3a^2 + 6ax - 2x - 3x^2}}{2y - 2x}$ va a zero, stante che si fa $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3a^2 + 6ax - 2x - 3x^2}{2y - 2x} = 0$.

Fa-

Facendosi pertanto eguale a zero l'equazione [A] cioè $\frac{dy}{dx} = 0$, ne viene

(K) $2y - 3a^2 + 6ax - 2x - 3x^2 = 0$, da cui prendendosi il volore di y, si

trova essere (D) $y = \frac{3}{2}a^2 - 3ax + x + \frac{3}{2}x^2$. Mediante la sostituzione di

questo valore di y l'equazione proposta diventa $\frac{9}{4}a^4 - 9a^3x + 3a^2x +$

$\frac{27}{2}a^2x^2 - 3ax^2 - 9ax^3 + x^3 + \frac{9}{4}x^4 - a^3 = 0$, o sia $9a^4 - 36a^3x +$

$12a^2x + 54a^2x^2 - 12ax^2 - 36ax^3 + 4x^3 + 9x^4 - 4a^3 = 0$., che si risolve nelle tre seguenti equazioni [E] $x^2 - 2ax + a^2 = 0$. (F) $x - a = 0$, [G] $9x - 9a + 4 = 0$. Le radici dell' equazione [E] sono $x = a$, $x = a$, l'equazione (F) dà $x = a$; e dall'equa-

zione (G) si ha $x = a - \frac{4}{9}$. Sostituendo a in luogo di x nell'equazione (K),

si trova $y = a$. Dunque alle radici $x = a$, $x = a$, $x = a$, o sia all'abscissa $= a$ non compete alcuna nè massima, nè minima ordinata (pel num. 320.), mentre l'equazione (A) va a zero con sostituirvi a in luogo tanto di x, che di y. Il valore poi

di x preso dall' equazione (G) sostituito nell'equazione (K) somministra $y = a - \frac{4}{27}$.

Se pertanto si sostituirà $a - \frac{4}{9}$ in luogo di x, ed $a - \frac{4}{27}$ in vece di y nell'

equazione (B), si avrà $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3a - 1 - 3a + \frac{12}{9}}{a - \frac{4}{27} - a + \frac{4}{9}} =$

$\frac{-1 + \frac{12}{9}}{-\frac{4}{27} + \frac{4}{9}} = \frac{-27 + 36}{-4 + 12} = \frac{9}{8}$ quantità positiva, conseguentemente all' abscissa $AD = x = a - \frac{4}{9}$ corrisponde l'ordinata $DE = y = a - \frac{4}{27}$ che è minima.

334. Resta a vedere se la curva ha una massima, o minima singolare. A tale effetto dispongo l'equazione data così $y = x \pm \sqrt{\overline{a - x}^3}$, in cui supponendo $x > a$, le due ordinate y sono immaginarie, e facendo $x = a$, le due ordinate si confondono in una sola $= a$, e questa è un' ordinata massima, o minima singolare. Per determinare se è massima, o minima, si sostituisca $a - n$ in luogo di x nella precedente equazione (la lettera n rappresenta una quantità minima), e fatto ciò si avrà $y = a - n \pm \sqrt{n^3}$: Onde perchè l'uno, e l'altro valore di y è minore di a, resta trovato, che l'ordinata $BC = a$ (*Fig.* 44.), che corrisponde all' abscissa $AB = a$, è una massima. In questa curva l'asse delle abscisse è HB, delle ordinate è KF, e il punto A è l'origine delle coordinate.

335. Se le due ordinate essendo reali, allorchè è $x < a$, si confonderanno, e diveranno eguali a b nel caso di $x = a$, indi divenendo $x > a$ si facciano immaginarie, ma poscia i valori di y determinati nel modo poc'anzi praticato non siano ambi maggiori, o ambi minori di b, ma uno maggiore, e l'altro minore, la curva non avrà nè massimi, nè minimi, e questo sarà il caso di un punto di regresso simile a quello della Fig. 31., di cui ho parlato al num. 318. Coll' esempio metterò la cosa sotto degli occhi. Debbasi trovare il valore di x, cui nella curva GEF (*Fig.* 45.) corrisponde una massima, o minima ordinata. L'equazione a questa curva è $q \times \overline{y - b}^2 = \overline{x - a}^3$. L'asse delle abscisse è AD, quello delle ordinate è CB, è l'origine delle coordinate è il punto A. Si differenzi l'equazione proposta, e ne verrà $2qydy - 2qbdy = 3x^2dx - 6axdx + 3a^2dx$, da cui si prenda il valore di

$\frac{dy}{dx}$,

$\frac{dy}{dx}$, che è $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6ax + 3a^2}{2qy - 2qb}$. Si faccia $\frac{dy}{dx} = 0$, e con ciò si avrà $3x^2 - 6ax + 3a^2 = 0$, da cui si ricava il valore di x, che è $x = a$. Sostituendo questo valore di x nell'equazione proposta, essa risulterà $q \times \overline{y - b}^2 = 0$ da cui si ottiene il valore di y, cioè $y = b$. Si differenzi l' equazione $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6ax + 3a^2}{2qy - 2qb}$, e fatto ciò si troverà (con ritenere costante y, e dx) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x - 6a}{2qy - 2qb}$. Ora con sostituire a in luogo di x, e b in luogo di y, l'equazione $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6ax + 3a^2}{2qy - 2qb}$ diventa $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, e la stessa sostituzione nell' equazione $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x - 6a}{2qy - 2qb}$ la riduce a $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$:

Se pertanto si accrescerà l' abscissa $x = a$ della quantità minima n, l'equazione proposta $y = b \pm \overline{x - a}\sqrt{\frac{x - a}{q}}$ si ridurrà a $y = b \pm n\sqrt{\frac{n}{q}}$: . Ma di questi valori di y uno è maggiore, l'altro è minore dell' ordinata $b = DE$, che compete all'abscissa $AD = a$, dunque la curva GEF non ha nè massime, nè minime ordinate, e tale in conseguenza non è l'ordinata $DE = b$.

336. Quanto ho detto per trovare la massima, o minima ordinata di una curva serve egualmente per trovare la massima, o minima subtangente, tangente, normale, subnormale ec. Per far ciò devesi primieramente differenziare l' equazion della curva, e maneggiarla in modo, che da una parte del segno d' egualità si abbia l' espressione generale di quella quantità il di cui massimo, o minimo valore vuolsi trovare. Fatto ciò devesi applicare l' esposto metodo de' massimi, e de' minimi all'altro membro dell' equazione, e quale egli si scoprirà essere, cioè o massimo, o minimo, tale pure sarà la quantità, che è in questione. Supponiamo che

 l'equa-

l'equazione della curva sia $y^4 + ax^2y - abxy + ay^3 - x^2y = 0$, e si vogliano determinare i valori di x, y, cui compete la massima, o la minima subtangente. Si differenzi l'equazione data, e si avrà $4y^3dy + 2axydx + ax^2dy - abydx -$

$abxdy + 3ay^2dy - 2xy^2dx - 2x^2ydy = 0$, da cui prendasi il valore di $\frac{dx}{dy}$,

che è $\frac{dx}{dy} = \frac{-4y^3 - ax^2 + abx - 3ay^2 + 2x^2y}{2axy - aby - 2xy^2}$: Finalmente si moltiplichi

per y l'uno, e l'altro membro di questa equazione, e ne verrà $\frac{ydx}{dy} =$

$\frac{-4y^3 - ax^2 + abx - 3ay^2 + 2x^2y}{2ax - ab - 2xy}$, il di cui primo membro è la formola

generale della subtangente: Quindi il secondo membro esibendo il valore della sottotangente, se a questo secondo membro

$\frac{-4y^3 - ax^2 + abx - 3ay^2 + 2x^2y}{2ax - ab - 2xy}$ si applicherà il metodo de' massimi, e de' minimi, determinando i valori di x, y, che danno un valor massimo, o minimo a questo secondo membro, questi stessi valori di x, y saranno quelli, cui competerà la massima o minima sottotangente.

337. Se dall'equazione differenziata si fosse preso il valore di $\frac{dy}{dx}$, che è

$\frac{dy}{dx} = \frac{2axy - aby - 2xy^2}{-4y^3 - ax^2 + abx - 3ay^2 + 2x^2y}$, e si fosse moltiplicato per y

l'uno, e l'altro membro, si sarebbe avuto $\frac{ydy}{dx}$

$= \frac{2axy^2 - aby^4 - 2xy^3}{-4y^3 - ax^2 + abx - 3ay^2 + 2x^2y}$, il di cui primo membro è la

formola generale della subnormale: Onde per determinare i valori di x, y, ai quali compete la massima, o minima subnormale, basta trovar quelli, che rendono,

Digitized by Google

no maſſimo, o minimo il valore di $\dfrac{2axy^2 - aby^2 - 2xy^3}{-4y^3 - ax^2 + abx - 3ay^2 + 2x^2y}$.

Parimente ſi troveranno nello ſteſſo modo i valori di x, y, cui corriſponde una maſſima, o minima tangente, con trovar prima il valore della tangente, che è

$$\frac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy} =$$

$$\frac{y\sqrt{\overline{2axy - aby - 2xy}^2 + \overline{2x^2y - 3ay^2 + abx - ax^2 - 4y^3}^2}}{2axy - aby - 2xy^2};$$

e lo ſteſſo ſi dica della normale, il di cui valore è $\dfrac{y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx} =$

$$\frac{y\sqrt{\overline{2axy - aby - 2xy^2}^2 + \overline{2x^2y - 3ay^2 + abx - ax^2 - 4y^3}^2}}{2x^2y - 3ay^2 + abx - ax^2 - 4y^3}.$$

338. Lo ſteſſo metodo, che ci ha ſcortati a ritrovare le maſſime, o le minime ordinate nelle curve, ſerve d' egual maniera a riſolvere in generale le queſtioni dei maſſimi, e dei minimi, vale a dire a ritrovare il valore della variabile, che fa divenire una propoſta funzione un maſſimo, o un minimo. A norma dei num. 320., 321. l' avere una data formola maſſimi, o minimi, dipende dalla ſpecie delle radici dell' equazione $\dfrac{dy}{dx} = 0$, ſecondo che cioè queſte radici o ſono reali, o immaginarie, o eſſendo reali ſono tutte ineguali, o parte eguali, e parte ineguali. Se le radici dell' equazione $\dfrac{dy}{dx} = 0$, ſono immaginarie, o eſſendo eguali ſono pari di numero, la formola non può divenire nè un maſſimo, nè un minimo: Se le radici eguali ſono impari di numero, eſſe equivalgono ad una ſola: Quante poi ſono le radici ineguali, altrettanti ſono i maſſimi, o minimi valori, che può acquiſtare la formola. Per diſtinguere queſti maſſimi dai minimi, baſta oſſervare ſe i valori, che la ſoſtituzione di ciaſcuna di queſte radici rende all' eſ-

preſ-

pressione $\frac{d^2 y}{dx^2}$, sono positivi, o negativi, mentre i valori positivi indicano minimi, e i valori negativi indicano massimi. Qualora andasse a zero l' espressione $\frac{d^2 y}{dx^2}$ si deve fare la sostituzione delle radici, e le stesse osservazioni nell' espressione $\frac{d^4 y}{dx^4}$ ec.

339. Debbansi ritrovare i valori di x, che fanno passare la formola $x^4-12x^3+46x^2-60x+4$ ad essere un massimo, o un minimo. Si faccia questa formola eguale a y così $y=x^4-12x^3+46x^2-60x+4$, indi si differenzi replicatamente secondo il solito a fine di avere le espressioni $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, e con ciò si avrà $\frac{dy}{dx}=x^3-9x^2+23x-15$; $\frac{d^2 y}{dx^2}=3x^2-18x+23$. Si eguagli a zero l' espressione $\frac{dy}{dx}$, e ne verrà $x^3-9x^2+23x-15=0$, le di cui radici [operando a norma dell'Art. IX. Cap. III. Tomo II.] trovansi essere 1, 3, 5. Dunque in tre casi la proposta formola può avere massimi, o minimi valori, cioè quando è $x=1$, $x=3$, $x=5$. Ma per determinare in specie se i valori della formola risultanti dalle sostituzioni delle ritrovate radici sono massimi, o minimi, ricaviamolo dai valori negativi, o positivi, che acquista l' espressione $\frac{d^2 y}{dx^2}$, allorchè in essa si sostituiscono ad una ad una le ritrovate radici. L' espressione pertanto $\frac{d^2 y}{dx^2}=3x^2-18x+23$ con sostituire 1 in luogo di x diventa $\frac{d^2 y}{dx^2}=+8$ valore positivo, il quale indica, che il fare $x=1$ rende la formola un minimo. Si sostituisca in seguito 3 in luogo di x nell' espressione $\frac{d^2 y}{dx^2}=3x^2-18x+23$, e fatto ciò ne verrà $\frac{d^2 y}{dx^2}=-4$ valore negativo, il qual fa vedere, che $x=3$ rende la formola data un massimo. Finalmente si sostituisca la ter-

terza radice 5 in luogo di x nell' espressione $\frac{d^2 y}{dx^2} = 3x^2 - 18x + 23$, e si avrà $\frac{d^2 y}{dx^2} = +8$ valor positivo, il quale mostra, che $x=5$ rende un minimo la formola proposta.

340. Questi massimi, e minimi si possono con maggiore speditezza determinare a norma del metodo esposto al num. 727. Tomo IV. In tal modo pertanto operando, si troveranno i massimi, e i minimi della data formola come segue

Valori assegnati ad x	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Corrispondenti valori della formola	+4.	−21.	−12.	−5.	−12.	−21.	+4.

Ed ecco, che [essendo tanto minore una quantità negativa, quanto maggiore è la di lei espressione] si trova la formola avere due valori minimi, cioè 21, che nascono da $x=1$, e da $x=5$, e un massimo $=5$, che nasce da $x=3$.

341. Le Funzioni considerate fin' ora sono state razionali intere; per altro non porteranno maggiore difficoltà, ancorchè siano fratte, essendo sempre lo stesso il modo di operare, che si è fino adesso praticato. Debbansi per esempio determinare i casi, ne' quali $y = \frac{M}{N}$ diventa un massimo, o un minimo (le lettere M, N rappresentano funzioni di x). Si differenzi la proposta equazione, e ne verrà $dy = \frac{N d.M - M d.N}{N^2}$, e $\frac{dy}{dx} = \frac{N d.M - M d N}{N^2 dx}$. Si eguagli a zero questo valore, e si avrà $N d.M - M d N = 0$, le di cui radici rendono y un massimo, o un minimo. Per conoscere se egli è un massimo, o pure un minimo, si prenda il valore di $\frac{d^2 y}{dx^2}$ con fare $d^2 y = \frac{d.(N d.M - M d N)}{N^2}$

$$-2\,d.N \times \frac{\overline{N\,d.M - M\,d.N}}{N^3}, \text{ e però } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d.(N d.M - M d N)}{N^2\, dx^2}$$

—2

$-2\,d.N \times \dfrac{\overline{N\,d.M - M\,d\,N}}{\overline{N}^3\,\overline{dx}^2}$, che si riduce a $\dfrac{d^2 y}{\overline{dx}^2} = \dfrac{d.(Nd.M - Md.N)}{\overline{N}^2\,\overline{dx}^2} =$

$\dfrac{d.Nd.M + Nd^2M - d.Md.N - Md^2N}{\overline{N}^2\,\overline{dx}^2} = \dfrac{Nd^2M - Md^2N}{\overline{N}^2\,\overline{dx}^2}$, perchè il termine

$-2\,d.N \times \dfrac{\overline{N\,d.M - M\,d.N}}{\overline{N}^3\,\overline{dx}^2}$ va a zero a motivo, che egli rinchiude il fattore

$Nd.M - MdN$, che è $= 0$. Ora dal valore positivo, o negativo di questa espres-

sione $\dfrac{d^2 y}{\overline{dx}^2} = \dfrac{N\,d^2\,M - M\,d^2\,N}{\overline{N}^2\,\overline{dx}^2}$ dipende l'essere y un massimo, o un minimo;

anzi egli dipende dal solo numeratore $Nd^2M - Md^2N$, perchè il denominatore essendo elevato al quadrato, egli è sempre positivo. Le radici adunque dell'equazione $Nd.M - Md.N = 0$, che danno ad $Nd^2M - Md^2N$ un valor positivo, rendono y un minimo; e quelle che danno ad $Nd^2M - Md^2N$ un valor negativo, rendono y un massimo.

Cercansi i valori di x, che rendono la formola $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2x + 3}$ un massimo, o un minimo. Si faccia $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2x + 3}$, poscia si differenzi questa equazione, a fine di avere il valore di $\dfrac{dy}{dx}$, che trovasi essere $\dfrac{dy}{dx} =$

$\dfrac{\overline{x^3 + 2x + 3} \times 2x - \overline{3x^2 - 2} \times \overline{x^2 - 1}}{\overline{x^3 + 2x + 3}^2} = -\dfrac{x^4 + 5x^2 + 6x + 2}{\overline{x^3 + 2x + 3}^2}$. Facendo

$\dfrac{dy}{dx} = 0$, si ha $-x^4 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$, la quale ha quattro radici reali, che sono $x = -1$, $x = -1$, $x = +1 + \sqrt{3}$, $x = +1 - \sqrt{3}$. Per determinare quali di queste radici rendano y un massimo, e quali un minimo, si prenda il valore di

$d^2 y$

Digitized by Google

$\frac{d^2 y}{\overline{dx}^2}$, che è $\frac{d^2 y}{\overline{dx}^2} =$

$$\frac{\overline{x^3+2x+3}^2 \times \overline{-4x^3+10x+6} - \overline{x^4+5x^2+6x+2} \times 2 \times \overline{x^3+2x+3} \times \overline{-3x^2-2}}{\overline{x^3+2x+3}^4}$$

$$= \frac{\overline{x^3+2x+3} \times \overline{-4x^3+10x+6}+2 \times \overline{-x^4+5x^2+6x+2} \times \overline{-3x^2-2}}{\overline{x^3+2x+3}^3}$$

(ho diviso il numeratore, e il denominatore per x^3+2x+3, onde è restata nel denominatore questa quantità elevata al cubo, e ciò hò fatto perchè tale quantità è positiva, ma se fosse stata negativa, non avrei fatta l' accennata divisione, a fine d' averla positiva, avvegnachè elevata alla quarta potestà, mentre le potestà pari di quantità negative sono positive. Intanto poi è necessario, che il denominatore dell' espressione $\frac{d^2 y}{\overline{dx}^2}$ sia una quantità positiva, acciò dal solo numeratore, secondo che è quantità positiva, o negativa, si possa prendere il giudizio di un minimo, o di un massimo) $= \frac{x^6-12x^4-21x^3-6x^2+9x+5}{\overline{x^3+2x+3}^3}$. Poichè il denominatore è positivo, il solo numeratore (A) $x^6-12x^4-21x^3-6x^2+9x+5$ mediante la sostituzione dei ritrovati valori di x servirà a mostrare quali di questi valori rendono la proposta formola $\frac{x^2-1}{x^3+2x+3}$ un massimo, e quali la rendono un minimo. Prima però si osservi essere superfluo il fare la sostituzione delle due radici -1, -1, perchè essendo queste eguali e in numero pari già si sa (pel num. 338.), che esse non danno alla formola nè un massimo, nè un minimo. Tutto adunque si riduce alle due radici $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$. Si sostituiscano esse una dopo l' altra nella quantità [A], e il valore, che acquisterà la quantità [A] mediante la sostituzione della radice $1+\sqrt{3}$, sarà $208+120\sqrt{3}-336-192\sqrt{3}-210-126\sqrt{3}-24-12\sqrt{3}+9+9\sqrt{3}+5=-348-201\sqrt{3}$ quantità negativa, conseguentemente $x=+1+\sqrt{3}$ rende la formola proposta un massimo. Si sostituisca in [A] la seconda radice $1-\sqrt{3}$, e fatto ciò ne verrà $208-120\sqrt{3}-336+192\sqrt{3}-210+126\sqrt{3}-24+12\sqrt{3}+9-9\sqrt{3}+5=-348+201\sqrt{3}$ quantità positiva; e però $x=1-\sqrt{3}$ rende la data formola un minimo.

342. Se la formola proposta cadrà sotto a questa forma $\frac{M}{\overline{N}^m}$, si faccia

$y = \frac{M}{\overline{N}^m}$, poscia si differenzi, e ne verrà $dy = \frac{\overline{N}^m\, d.M - m M \overline{N}^{m-1}\, dN}{\overline{N}^{2m}}$

$= \frac{N d.M - m M d.N}{\overline{N}^{m+1}}$, e (B) $\frac{dy}{dx} = \frac{N d.M - m M d N}{dx\, \overline{N}^{m+1}}$. Col porre $\frac{dy}{dx} = 0$,

si avrà $Nd.M - mMd.N = 0$, della quale equazione le radici serviranno a rendere la formola proposta un massimo, o un minimo. Ma per distinguere il caso di un massimo dal caso di un minimo, si prenda il valore di $\frac{d^2 y}{dx^2}$, che si ottiene dall' equazione (B), ed è $\frac{d^2 y}{\overline{dx}^2} = \overline{N}^{m+1}\, \frac{d.(Nd.M - mMd.N)}{\overline{dx}^2\, \overline{N}^{2m+2}}$

$- \frac{(m+1)\, \overline{N}^m\, d.N \times \overline{Nd.M - mMd.N}}{\overline{dx}^2\, \overline{N}^{2m+2}}$; ma perchè questo secondo termine ha per fattore $NdM - mMd.N$, che è $= 0$, l'equazione si riduce a $\frac{d^2 y}{\overline{dx}^2}$

$$= \frac{\overline{N}^{m+1}\, d.(Nd.M - mMd.N)}{\overline{dx}^2\, \overline{N}^{2m+2}} = \frac{d.(Nd.M - mMd.N)}{\overline{dx}^2\, \overline{N}^{m+1}} =$$

$\frac{\overline{1-m} \times d.Md.N + Nd^2.M - mMd^2.N}{\overline{dx}^2\, \overline{N}^{m+1}}$. Se in questa quantità si sostituiranno in luogo della variabile le radici dell' equazione (B), si verrà a determinare se queste radici rendono la formola data $\frac{M}{\overline{N}^m}$ un massimo, o un minimo: Per poterne poi giudicare dal solo numeratore, è necessario, che il denominatore sia positivo, e tale sarà ogniqualvolta l'esponente m sia un numero impari, perchè in tal caso è $m+1$ numero pari; ma se m sarà un numero pari, e però $m+1$ numero impari, bi-

bifognerà moltiplicare tanto il numeratore, che il denominatore per N, a fin che il denominatore fi trovi elevato a poteftà pari, e in confeguenza fia quantità pofitiva, onde dal folo numeratore poter giudicare dei maffimi, o dei minimi. Se pertanto m farà un numero impari, il giudizio cercato fi ripeterà da

$\overline{1-m} \times d.M d.N + N d^2.M - m M d^2.N$; e fe m farà un numero pari, il giudizio fi

dovrà prendere da $\overline{1-m} \times N d.M\, d.N + \overline{N}^2\, d^2.M - m M N d^2.N$; fecondo che mediante la foftituzione delle radici dell' equazione (B) rifulta quantità pofitiva, o negativa.

343. La formola può avere ancor quefta forma $\frac{\overline{M}^n}{\overline{N}^m}$, che faccio eguale a y

così $y = \frac{\overline{M}^n}{\overline{N}^m}$. Col differenziare quefta equazione ne viene $dy =$

$$\frac{n\, \overline{N}^m\, \overline{M}^{n-1}\, d.M - m\, \overline{M}^n\, \overline{N}^{m-1}\, d.N}{\overline{N}^{2m}} = \frac{n N \overline{M}^{n-1}\, d.M - m\, \overline{M}^n\, d\,N}{\overline{N}^{m+1}},\ \text{e}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{nN\, \overline{M}^{n-1}\, d\,M - m\, \overline{M}^n\, d.N}{dx\, \overline{N}^{m+1}}$. Faccio $\frac{dy}{dx} = 0$, ed ho (D)

$n N \overline{M}^{n-1}\, d.M - m\, \overline{M}^n\, d\,N = 0$, le di cui radici rendono la propofta formola un maffimo, o un minimo. Per ifpecificare quefti due cafi prendo al folito

l' efpreffione $\frac{d^2 y}{\overline{dx}^2}$, che è $\frac{d^2 y}{\overline{dx}^2} = \frac{\overline{N}^{m+1}\, d\,(n N \overline{M}^{n-1}\, d.M - m \overline{M}^n\, d\,N)}{\overline{dx}^2\, \overline{N}^{2m+2}}$

$- \frac{(m+1)\, \overline{N}^m\, d.N \times \overline{n N \overline{M}^{n-1}\, d.M - m\, \overline{M}^n\, d.N}}{\overline{dx}^2\, \overline{N}^{2m+2}}$, che fi riduce a $\frac{d^2 y}{\overline{dx}^2} =$

$\frac{\overline{N}^{m+1}\, d\,(n N \overline{M}^{n-1}\, d.M - m \overline{M}^n\, d.N)}{\overline{dx}^2\, \overline{N}^{2m+2}}$ [perchè il fecondo termine va a

zero a motivo d' aver per fattore $n N \overline{M}^{n-1}\, d.M - m \overline{M}^n\, d.N$, che è $= 0$] $=$

 d(n

$$\frac{d.(n\,N\,\overline{M}^{n-1}\,d.M - m\,\overline{M}^{n}\,d.N)}{\overline{dx}^{2}\;\overline{N}^{m+1}} =$$

$$\frac{n\,\overline{M}^{n-1}\,d.N\,d\,M + n \times \overline{n-1}\,N\,\overline{M}^{n-2}\,\overline{dM}^{2}}{\overline{dx}^{2}.\;\overline{N}^{m+1}} +$$

$$\frac{n\,N\,\overline{M}^{n-1}\,d^{2}.M - m\,n\,\overline{M}^{n-1}\,d.M\,d.N - m\,\overline{M}^{n}\,d^{2}.N}{\overline{dx}^{2}\;\overline{N}^{m+1}}\,.$$

Se m è un numero impari, sarà $m+1$ numero pari, e il denominatore sarà una quantità positiva; che se m sarà un numero pari, si moltiplichi per N a norma del preced. num. 342. il numeratore, e il denominatore di questa quantità, affinchè il denominatore si trovi elevato a potestà pari, poscia con far uso del solo numeratore, si sostituiscano nel medesimo le radici dell' equazione [D], onde poter giudicare di un massimo, o di un minimo, secondo che è negativo, o positivo il valore, che ne risulta.

344 La formola, di cui si vogliono determinare i massimi, o i minimi, può essere irrazionale; non ostante il modo d'operare è sempre lo stesso, cioè di prendere le radici dell' espressione $\frac{dy}{dx} = 0$, indi osservare se la loro sostituzione rende l' espressione $\frac{d^{2}y}{\overline{dx}^{2}}$ positiva, o negativa: Quelle, che gli danno un valor positivo, fanno divenire un minimo la formola data, e pel contrario la fanno divenire un massimo quelle, da cui risulta un valor negativo. Una cosa poi si può osservare, ed è, che essendo $\sqrt{y}$ la funzione di x, della quale si vogliono determinare i massimi, o i minimi, se y è un massimo, o un minimo, tale è pure $\sqrt{y}$, purchè sia $\sqrt{+y}$, perchè se fosse $\sqrt{-y}$, questo valore a motivo d' essere immaginario, nè darebbe un massimo, nè un minimo. Nei casi poi, ne' quali $+\sqrt{y}$ è un massimo, o un minimo, *vice versa* $-\sqrt{y}$ è un minimo, o un massimo.

Quanto ho detto di $\sqrt{y}$, vale generalmente della funzione $y^{\frac{m}{n}}$, che sarà un massimo, o un minimo, se tale è y^{m}. E quì si osservi, che la funzione y^{m} non avrà nè massimi, nè minimi se m sarà un numero impari, perchè nell' equazione, che si ritrova con fare $\frac{dy}{dx} = 0$, avendo luogo y^{m-1}, e in tal caso $m-1$ essendo numero pari, l' equazione, che risulta dal fare $\frac{dy}{dx} = 0$, avrà un numero pari di

ra-

Digitized by Google

radici eguali; onde [pel num. 321.] la formola proposta nè avrà massimi, nè minimi: Laddove ella avrà un massimo, o un minimo, se m sarà un numero pari, perchè allora $m-1$ sarà impari. Molte volte per iscoprire i massimi, o i minimi si dovrà osservare la funzione y^m in luogo di $y^{\frac{m}{n}}$, che è data, e ciò quando dalle espressioni $\frac{d^2 y}{dx^2}$, o $\frac{d^3 y}{dx^3}$ ec. non si potrà prendere indizio o di un massimo, o di un minimo.

345. A norma delle regole date si trattano ancora le quantità trascendenti a fine di determinare i casi, ne' quali possono acquistare massimi, o minimi valori.

346. Quantunque abbia applicato le esposte regole a varii esempj, pure per ragion d'esercizio non stimo superfluo l'aggiungere ancora il seguente. Data la retta CF di posizione (Fig. 39, 40., 41., 42.) tagliata per metà in E dalla retta BE, che fa colla detta CF l'angolo semiretto CEA, debbasi trovare su la BE il punto A, dal quale conducendosi le rette AC, AF, e la perpendicolare AD, sia

$$\frac{\overline{AF}^4 - \overline{AC}^4}{AD}$$ un massimo, o un minimo.

347. Risol. Essendo incognita la posizione del punto A, è pure incognita la ED intercetta fra la perpendicolare AD, e il punto E dividente per metà la data CF; che però chiamo ED $= x =$ AD a motivo, che il triangolo AED è rettangolo in D, onde l'angolo E alla base essendo per ipotesi semiretto, tale è eziandio l'altro EAD, e in conseguenza egli è equicrure. Chiamo EC $=$ EF $= a$; onde sarà CD $= \pm a \mp x$, ed FD $= a + x$. Ma a motivo dell'angolo D retto è AF $= \sqrt{\overline{FD}^2 + \overline{AD}^2}$, CA $= \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2}$, vale a dire in termini analitici AF $= \sqrt{\overline{a+x}^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}$,

CA $= \sqrt{\pm\overline{a \mp x}^2 + x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}$: Per lo che a norma della condizione data nel problema dovrà essere

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}^4 - \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}^4}{x}$$, o sia

$$\frac{\overline{a^2 + 2ax + 2x^2}^2 - (a^2 - 2ax + 2x^2)^2}{x}$$ un massimo, o un minimo. Per de-

determinare il valore di x, che rende questa formola un massimo, o un minimo, primieramente l'eguaglio a y, poi la differenzio, e mi viene

$$dy = \frac{2x \times \overline{a^2+2ax+2x^2} \times \overline{2adx + 4xdx} - 2x \times \overline{a^2-2ax+2x^2} \times \overline{-2adx+4xdx}}{x^2}$$

$$- \frac{dx \times \overline{(a^2 + 2ax + 2x^2)^2 - (a^2 - 2ax + 2x^2)^2}}{x^2},$$ che con fare le attuali moltiplicazioni, e dividerla per dx diventa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4ax^3 + 16a^2x^2 + 24ax^3 + 16x^4}{x^2} + \frac{4a^3x - 16a^2x^2 + 24ax^3 - 16x^4}{x^2}$$

$$- \frac{a^4 - 4a^3x - 8a^2x^2 - 8ax^3 - 4x^4}{x^2} + \frac{a^4 - 4a^3x + 8a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{x^2}$$

$= \frac{32ax^3}{x^2}$. Si faccia $\frac{dy}{dx} = 0$, e ne verrà $32ax^3 = 0$, e però $x = 0$. Si differenzi di nuovo l'equazione $\frac{dy}{dx} = \frac{32ax^3}{x^2}$, con ritenere dx costante a fine di avere il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, con cui giudicare, se allorchè è $x = 0$, la formola proposta diventa un massimo, o un minimo, o pure nè l'uno, nè l'altro abbia luogo. Fatta la differenziazione si ha $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c6ax^4 - 64ax^4}{x^4}$, che, con fare $x = 0$, diventa $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0-0}{0}$ espressione, che per se nulla indica. Ma perchè l'equazione $\frac{dy}{dx}$ va a zero con sostituire 0 in luogo di x, egli costa (giusta il num. 320.), che all'abscissa $x = 0$ non corrisponde nè un massimo, nè un minimo.

mo. E siccome $EA = \sqrt{\overline{ED}^2 + \overline{DA}^2} = \sqrt{2x^2}$, perciò nel caso di $x = o$ il punto A cade in E.

348. Cambiamo adesso l'espressione della proposta formola, e cerchiamo qual valore di x renda la medesima un massimo, o un minimo, allorchè è $\frac{AF - AC}{\sqrt{AD}} =$

$y = \frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2} - \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}{\sqrt{x}}$. Si differenzi questa equazione

e si avrà $dy = \frac{\sqrt{x} \times \overline{adx + 2xdx}}{x\sqrt{a^2+2ax+2x^2}} - \frac{\sqrt{x} \times \overline{-adx + 2xdx}}{x\sqrt{a^2-2ax+2x^2}}$

$- dx \times \frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2} - \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}{2x\sqrt{x}}$

e però $\frac{dy}{dx} = \frac{2x \times \overline{a + 2x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}} - \frac{2x \times \overline{-a + 2x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}} -$

$\frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}}{2x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}{2x\sqrt{x}}$: Onde facendo $\frac{dy}{dx} = o$, si avrà

$\frac{-2x \times \overline{a + 2x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}} + \frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}}{2x\sqrt{x}} = -$

$\frac{2x \times \overline{-a + 2x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}} + \frac{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}{2x\sqrt{x}}$, o sia $\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}$

$- \frac{2x \times \overline{a + 2x}}{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}} = \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2} - \frac{2x \times \overline{-a + 2x}}{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}$,

e per-

e perchè $\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2} = \frac{a^2 + 2ax + 2x^2}{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}}$ mediante il moltiplicare, e dividere nel tempo stesso $\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}$ per $\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}$, e per la stessa ragione $\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2} = \frac{a^2 - 2ax + 2x^2}{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}$, sarà

$$\frac{a^2 + 2ax + 2x^2}{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}} - \frac{2x \times \overline{a + 2x}}{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}} = \frac{a^2 - 2ax + 2x^2}{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}$$

$$- \frac{2x \times \overline{-a + 2x}}{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}$$, e in conseguenza $\frac{a^2 + 2ax + 2x^2 - 2ax - 4x^2}{a^2 - 2ax + 2x^2 + 2ax - 4x^2}$

$= \frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}}{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}$, vale a dire $\frac{a^2 - 2x^2}{a^2 - 2x^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}}{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}$.

Inalzo al quadrato l'uno, e l'altro membro di questa equazione, con che ho $\frac{a^4 - 4a^2x^2 + 4x^4}{a^4 - 4a^2x^2 + 4x^4} = \frac{a^2 + 2ax + 2x^2}{a^2 - 2ax + 2x^2}$, la di cui moltiplicazione in croce dà $a^6 - 2a^5x - 2a^4x^2 + 8a^3x^3 - 4a^2x^4 - 8ax^5 + 8x^6 = a^6 + 2a^5x - 2a^4x^2 - 8a^3x^3 - 4a^2x^4 + 8ax^5 + 8x^6$, che si riduce a $16x^4 - 16a^2x^2 + 4a^4 = 0$, cioè $x^4 - a^2x^2 + \frac{1}{4} a^4 = 0$, che con estrarre la radice quadrata diventa $x^2 - \frac{1}{2} a^2 = 0$, e di nuovo estraendo la radice quadrata si ha $x = \pm a \sqrt{\frac{1}{2}}$. Adunque se la formola proposta ha massimi, o minimi, essi corrisponderanno ad $x = \pm a \sqrt{\frac{1}{2}}$

o sia

o sia ad $x = + a \sqrt{\frac{1}{2}}$, poichè la sostituzione di $x = - a \sqrt{\frac{1}{2}}$ rende immaginaria l' equazione $y = \frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2} - \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}{\sqrt{x}}$. Per determinare in ispecie se sono massimi, o pur minimi si prenda l'espressione di $\frac{d^2 y}{dx^2}$, che si ha con differenziare l' equazione $\frac{dy}{dx} = \frac{2x \times \overline{a + 2x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}} -$

$$\frac{2x \times \overline{-a + 2x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}}{2x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}{2x\sqrt{x}} =$$

$$\frac{2x \times \overline{a + 2x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}} - \frac{2x \times \overline{-a + 2x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}} -$$

$$\frac{a^2 - 2ax - 2x^2}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}} + \frac{a^2 - 2ax + 2x^2}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}$$

$$= \frac{2ax + 4x^2 - a^2 - 2ax - 2x^2}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2}} + \frac{2ax - 4x^2 + a^2 - 2ax + 2x^2}{2x\sqrt{x}\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}} =$$

(con togliere i termini che si distruggono, e ridurre sotto il vincolo il fattore $2x\sqrt{x}$ de' denominatori) $\frac{2x^2 - a^2}{\sqrt{4a^2x^3 + 8ax^4 + 8x^5}} +$

$$\frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{4a^2x^3 - 8ax^4 + 8x^5}} = \overline{2x^2 - a^2} \times \overline{4a^2x^3 + 8ax^4 + 8x^5}^{\,-\frac{1}{2}}$$

$$+ \overline{a^2 - 2x^2} \times \overline{4a^2x^3 - 8ax^4 + 8x^5}^{\,-\frac{1}{2}}$$

. Si differenzj pertanto ritenendo dx costante, e si avrà $\frac{d^2 y}{dx^2} = 4x \times \overline{4a^2x^3 + 8ax^4 + 8x^5}^{\,-\frac{1}{2}}$

$$-\frac{1}{2}\times\overline{2x^2-a^2}\times\overline{4a^2x^3+8ax^4+8x^5}^{\,-\frac{3}{2}}\times\overline{12a^2x^2+32ax^3+40x^4}$$

$$-4x\times\overline{4a^2x^3-8ax^4+8x^5}^{\,-\frac{1}{2}}-$$

$$\frac{1}{2}\times\overline{a^2-2x^2}\times\overline{4a^2x^3-8ax^4+8x^5}^{\,-\frac{3}{2}}\times\overline{12a^2x^2-32ax^3+40x^4},$$

che riduco a questa forma $\frac{d^2y}{dx^2}=$

$$4x\times\overline{4a^2x^3+8ax^4+8x^5}\times\overline{4a^2x^2+8ax^4+8x^5}^{\,-\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\times\overline{2x^2-a^2}\times\overline{12a^2x^2+32ax^3+40x^4}\times\overline{4a^2x^3+8ax^4+8x^5}^{\,-\frac{3}{2}}$$

$$-4x\times\overline{4a^2x^3-8ax^4+8x^5}\times\overline{4a^2x^3-8ax^4+8x^5}^{\,-\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\times\overline{a^2-2x^2}\times\overline{12a^2x^2-32ax^3+40x^4}\times\overline{4a^2x^3-8ax^4+8x^5}^{\,-\frac{3}{2}};$$ o sia

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6a^4x^2+16a^3x^3+24a^2x^4-8x^6}{\sqrt{\overline{4a^2x^3+8ax^4+8x^5}^{\,3}}}-\frac{6a^4x^2+16a^3x^3-24a^2x^4+8x^6}{\sqrt{\overline{4a^2x^3-8ax^4+8x^5}^{\,3}}}$$

$$=\frac{2x^2\times\overline{3a^4+8a^3x+12a^2x^2-4x^4}}{\sqrt{\overline{4x^3}^{\,3}\times\overline{a^2+2ax+2x^2}^{\,3}}}-\frac{2x^2\times\overline{3a^4+8a^3x-12a^2x^2+4x^4}}{\sqrt{\overline{4x^3}^{\,3}\times\overline{a^2-2ax+2x^2}^{\,3}}},$$

vale a dire $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3a^4+8a^3x+12a^2x^2-4x^4}{\sqrt{16x^5\times\overline{a^2+2ax+2x^2}^{\,3}}}\times$

$\frac{-3a^4-8a^3x+12a^2x^2-4x^4}{\sqrt{16x^5\times\overline{a^2-2ax+2x^2}^{\,3}}}$. In questa espressione di $\frac{d^2y}{dx^2}$ sostituendo in luo-

go

go di x il suo valore $a\sqrt{\frac{1}{2}}$, si ottiene $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8a^4+8a^4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4a^5\sqrt{\frac{1}{2}}\times\overline{2a^2+2a^2\sqrt{\frac{1}{2}}}^3}}$

$$+\frac{2a^4-8a^4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4a^5\sqrt{\frac{1}{2}}\times\overline{2a^2-2a^2\sqrt{\frac{1}{2}}}^3}} = \frac{8a^4+8a^4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4a^5\sqrt{\frac{1}{2}}\times\overline{20a^6+28a^6\sqrt{\frac{1}{2}}}}} +$$

$$\frac{2a^4-8a^4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4a^5\sqrt{\frac{1}{2}}\times\overline{20a^6-28a^6\sqrt{\frac{1}{2}}}}} = \frac{8a^4+8a^4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{80a^{11}\sqrt{\frac{1}{2}}+56a^{11}}} +$$

$$\frac{2a^4-8a^4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{80a^{11}\sqrt{\frac{1}{2}}-56a^{11}}} =$$ [con dividere i numeratori, e i denominatori per $2a^4$]

$$\frac{4+4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\overline{20\sqrt{\frac{1}{2}}+14}\times a^3}} + \frac{1-4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\overline{20\sqrt{\frac{1}{2}}-14}\times a^3}} = \frac{4+4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^3\times\overline{14.20+14}}} +$$

$$\frac{1-4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^3\times\overline{14.20-14}}} = \frac{4+4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^3\times 28.20}} + \frac{1-4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^3\times 0.20}};$$ e riducendo

il secondo membro allo stesso denominatore si ha $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$$\frac{4\sqrt{a^3\times 0.20}+2.8\times\sqrt{a^3\times 0.20}+\sqrt{a^3\times 28.20}-2.8\times\sqrt{a^3\times 28.20}}{\sqrt{a^3\times 28.20}\times\sqrt{a^3\times 0.20}}.$$

Ma siccome il denominatore $\sqrt{a^3\times 28.20}\times\sqrt{a^3\times 0.20}$ è positivo; perciò rite-

nen-

nendo ſoltanto il numeratore ſi avrà $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \times \sqrt{a^3 \times 0.20} + 2.8 \times \sqrt{a^3 \times 0.20}$
$+ \sqrt{a^3 \times 28.20} - 2.8 \times \sqrt{a^3 \times 28.20} = 6.8 \times \sqrt{a^3 \times 0.20} - 1.8 \times \sqrt{a^3 \times 28.20}$
$= \frac{68}{10} \times \sqrt{a^3 \times \frac{20}{100}} - \frac{18}{10} \times \sqrt{a^3 \times \frac{2820}{100}} = \frac{68}{10} \times \frac{45}{100} \times \sqrt{a^3} - \frac{18}{10} \times \frac{531}{100} \times \sqrt{a^3}$
$= \frac{3060 - 9558}{1000} \times \sqrt{a^3} = -\frac{6498}{1000} \sqrt{3}$. Quindi eſſendo negativo queſto valore, la formola acquiſterà un valor maſſimo allorchè ſarà $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, e in tal caſo, poichè $EA = \pm\sqrt{\overline{ED}^2 + \overline{DA}^2} = \pm\sqrt{2x^2}$, con ſoſtituire il valore di x^2, che è $\frac{1}{2}a^2$, ſarà $EA = \pm a$, con che reſta determinato il punto A ſu la retta EB tale, che conducendoſi le rette AC, AF, e la perpendicolare AD, è $\frac{AF - AC}{\sqrt{AD}}$ un maſſimo.

349. Che poi la formola $\pm \frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2} \mp \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}{\sqrt{x}}$ abbia valori maſſimi corriſpondenti ad $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ ſi può leggere ſu la curva di queſta equazione $y = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 2ax + 2x^2} \mp \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}}{\sqrt{x}}$, che è NHAKP [Fig. 43.], la quale all'abſciſſa $AR = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ ha le ordinate maſſime RH, RK. In queſta curva AE è l'aſſe delle abſciſſe, e BC quello delle ordinate.

350. Fin'ora ho dato il modo di ritrovare i maſſimi, o minimi valori di quelle formole, nelle quali entra una ſola variabile, vediamo adeſſo come debbaſi operare per trovare i maſſimi, o minimi valori di quelle formole, nelle quali entrano due variabili. E qui ſi oſſervi, che due caſi devonſi diſtinguere, il primo è quando le variabili non ſono fra loro moltiplicate, come in queſta formola $x^5 + ax^3 - bx^2 - c + y^3 + gy^2 - by + k$, che rappreſento così M+N, dove la lettera M diſegna la funzione di x, ed N di y, il ſecondo è quando le variabili ſono moltiplicate fra loro, come in queſta formola $x^4 - yx^3 + axy^2 + abyx - xy^3 + a^3b$. E quanto al primo caſo la funzione M+N ſarà un maſſimo, ſe tanto M, che N ſarà un maſſimo, o pure ſarà un minimo, ſe tanto M, che N ſarà un minimo; laddove la funzione M+N non ſarà un maſſimo, nè un minimo, ſe mentre il valo-

Digitized by Google

lore, che si dà ad x rende M un massimo, il valore, che si dà a y renderà N un minimo, o *vice versa* Considerando la funzione M—N, si scorgerà dover essa essere un massimo, se essendo M un massimo, sarà N un minimo; o pure essa sarà un minimo, qualora essendo M un minimo, N sarà un massimo: Non sarà poi nè un massimo, nè un minimo, se M, ed N saranno nel tempo stesso un massimo, ovvero un minimo.

351. Qualora pertanto si dovrà determinare, se la funzione $M \pm N$ è un massimo, o un minimo, oppur nè l'uno, nè l'altro, non altro s' avrà a fare, che ritrovare nel modo di sopra esposto i valori di x, che rendono la funzione M un massimo, o un minimo, e i valori di y, che rendono la funzione N un massimo, o un minimo, indi dalla loro combinazione giudicare a norma di quanto pur ora ho detto, se la funzione $M \pm N$ è un massimo, o un minimo, oppur nè l'uno, nè l'altro. Applicherò all' esempio l' esposta dottrina, benchè per altro chiarissima per se stessa.

352. Debbansi trovare i valori di x, e di y, che rendono la funzione $x^5 - \frac{5}{4}x^4 - 15x^3 + \frac{55}{2}x^2 + 30x + 56 + y^4 - \frac{20}{3}y^3 - 4y^2 + 16y$ un massimo, o un minimo. Faccio $M = x^5 - \frac{5}{4}x^4 - 15x^3 + \frac{55}{2}x^2 + 30x + 56$, ed $N = y^4 - \frac{20}{3}y^3 - 4y^2 + 16y$, e differenziando la prima di queste due equazioni, cerco i valori di x, che rendono la funzione $M = x^5 - \frac{5}{4}x^4 - 15x^3 + \frac{55}{2}x^2 + 30x + 56$ un massimo, o un minimo. Differenziando pertanto si trova $\frac{dM}{5dx} = x^4 - x^3 - 9x^2 + 11x + 6$, che con ritenere dx costante differenzio di nuovo, e mi viene $\frac{d^2M}{5dx^2} = 4x^3 - 3x^2 - 18x + 11$. Pongo $\frac{dM}{5dx} = 0$, ed ho $x^4 - x^3 - 9x^2 + 11x + 6 = 0$, che ha quattro radici reali, cioè $x = 2$, $x = -3$, $x = 1 + \sqrt{2}$, $x = 1 - \sqrt{2}$. Sostituisco ciascuna di queste radici nell'equazione $\frac{d^2M}{5dx^2} = 4x^3 - 3x^2 - 18x + 11$, e da $x = 2$ risulta $\frac{d^2M}{5dx^2} = -5$; da $x = -3$ nasce $\frac{d^2M}{5dx^2} = -70$; $x = 1 + \sqrt{2}$ dà $\frac{d^2M}{5dx^2} = 12 - 4\sqrt{2}$, ed $x = 1 - \sqrt{2}$ somministra $\frac{d^2M}{5dx^2} = 12 + 4\sqrt{2}$. Adunque quando è $x = 2$, la formola M è un massimo, cioè $M = +118$: Quando

è x

è $x=-3$, la formola M è pure un massimo, che è $M=\frac{1097}{4}$. Quando è $x=1+\sqrt{2}$, la formola M è un minimo, cioè $M=\frac{333}{4}+24\sqrt{2}$: E quando è $x=1-\sqrt{2}$, la formola M è parimente un minimo, vale a dire $M=\frac{333}{4}-24\sqrt{2}$. Passiamo a differenziare la seconda equazione $N=y^4-\frac{20}{3}y^3-4y^2+16y$ così $\frac{dN}{dy}=4y^3-20y^2-8y+16$, che differenzio di nuovo ritenendo costante dy, e con ciò ritrovo $\frac{d^2N}{4\,dy^2}=3y^2-10y-2$. Faccio $\frac{dN}{dy}=0$, e però $4y^3-20y^2-8y+16=0$, le di cui radici trovansi essere $y=-1$, $y=3+\sqrt{5}$, $y=3-\sqrt{5}$. Sostituisco ciascuna di queste radici nell' equazione $\frac{d^2N}{4\,dy^2}=3y^2-10y-2$, e

$y=-1$ rende $\frac{d^2N}{4\,dy^2}=+11$, $y=3+\sqrt{5}$ dà $\frac{d^2N}{4\,dy^2}=+10+8\sqrt{5}$;

$y=3-\sqrt{5}$ esibisce $\frac{d^2N}{4\,dy^2}=+10-8\sqrt{5}$: Quindi quando è $y=-1$, la formola N risulta un minimo, che è $N=-\frac{37}{3}$; quando è $y=3+\sqrt{5}$, la formola N diventa pure un minimo, che si trova essere $N=-112-\frac{160}{3}\sqrt{5}$; e quando è $y=3-\sqrt{5}$, la formola N passa ad essere un massimo, che è $N=-112+\frac{160}{3}\sqrt{5}$. Se pertanto si combineranno quei valori di x, e di y, che si sono trovati dare alle formole M, N valori massimi, e quelli, che si sono trovati dare alle stesse formole M, N valori minimi, verransi in questo modo ad avere i cercati valori massimi, e minimi, che può acquistare la proposta formola $M+N$. Di fatto

Ponen-

Ponendo	ne viene
$x = 2,\ y = 3 - \sqrt{5}$	$M+N = +118 - 112 + \frac{160}{3}\sqrt{5} = 6 + \frac{160}{3}\sqrt{5}$ mass.
$x = -3,\ y = 3 - \sqrt{5}$	$M+N = \frac{1097}{4} - 112 + \frac{160}{3}\sqrt{5} = \frac{649}{4} + \frac{160}{3}\sqrt{5}$ mass.
$x = 1 + \sqrt{2},\ y = -1$	$M+N = +\frac{333}{4} - \frac{37}{3} + 24\sqrt{2} = +\frac{851}{12} + 24\sqrt{2}$ min.
$x = 1 - \sqrt{2}:\ y = 3 + \sqrt{5}$	$M+M = \frac{693}{4} - 19\sqrt{2} - 112 - \frac{160}{3}\sqrt{5} = +\frac{245}{4} - 19\sqrt{2} - \frac{160}{3}\sqrt{5}$ min.

353. Se si combinasse un valore di x, che rende M un massimo con un valore di y, che rende N un minimo, o pure un valore di x, che rende M un minimo con un valore di y, che rende N un massimo, la formola $M+N$ nè sarebbe un massimo, nè un minimo.

354. Rimane a parlare del secondo caso, quando cioè le due variabili x, y sono moltiplicate fra loro, come nella seguente formola $ay^3 - x^3y + a^2xy + x^4 - ab^3$. Ora egli è evidente, che le formole di questa natura non possono acquistare valori massimi, se tanto la x, che la y non concorrono a dare alla formola un valor massimo, e *vice versa* non può la formola avere un valor minimo, se non cospirano x, y per la loro parte a rendere il valor della formola un minimo, mentre se d'una variabile il valore farà acquistare alla formola un valor massimo, e l'altra variabile le darà un valor minimo, il valor della formola non potrà risultare nè massimo, nè minimo. Ciò posto s'intende, che per rilevare quando una formola data possa avere un valor massimo, o minimo, bisogna conoscere quali siano quei valori di x, e di y, ognun de' quali può per la sua parte dare alla formola un valor massimo, o minimo. A fine pertanto di scoprire questi tali valori di x, y, si differenzi la formola proposta, che chiamo $= X$, onde il di lei differenziale sia $dX = Mdx + Ndy$: E siccome il valor della formola risulta massimo, o minimo dalla sostituzione di tali determinati valori di x, y, si supponga primieramente, che la x abbia quel determinato valore, che rende X un massimo, o un minimo; ond'è, che (per ipotesi) essendo costante la x, l'equazione $d.X = Mdx + Ndy$ si riduce a $d.X = Ndy$, che devesi eguagliare a zero: Poscia si faccia l'accennata supposizione rispetto alla y, lo che ridurrà l'equazione $d.X = Mdx + Ndy$ a $d.X = Mdx$, che devesi eguagliare a zero: Si faccia adunque $M = 0$, $N = 0$, e col mezzo di queste due equazioni, ognuna delle quali rinchiude le variabili x, y, se ne elimini una, come la x, e dell'equazione, che ne risulterà data per y si prendano le radici, che saranno i valori di y, che possono dare alla formola proposta valori massimi, o minimi: dipoi si elimini la y, e nello stesso modo dell'equazione, che ne risulterà data per x, si trovino le radici, che

che faranno i valori di x, i quali possono dare alla formola valori massimi, o minimi. Per iscorgere se le ritrovate radici, o sia i ritrovati valori di x, e y danno alla formola valori massimi, oppur minimi, si differenzino le espressioni M, N, e nelle risultanti quantità $\frac{d\,M}{d\,x}$, $\frac{d\,N}{d\,x}$ si sostituiscano gli antecedentemente trovati valori di x, y, poscia si osservi se le fatte sostituzioni rendono $\frac{d\,M}{dx}$, $\frac{d.\,N}{dx}$ positive, o negative; mentre quei valori di x, e di y, che renderanno $\frac{d\,M}{dx}$, $\frac{d.N}{dx}$ quantità positive, daranno alla formola X valori massimi, e pel contrario quei valori di x, y daranno alla formola X valori minimi, la di cui sostituzione renderà $\frac{d\,M}{dx}$, $\frac{d.\,N}{dx}$ quantità negative. Onde se $\frac{d\,M}{dx}$, $\frac{d.\,N}{dx}$ faranno affette da diverso segno, i sostituiti valori di x, y non renderanno la formola nè un massimo, nè un minimo. Soltanto devesi avvertire, che nel prendere il differenziale di M, o di N per giudicare se il ritrovato valore di una variabile rende la formola X un massimo, o un minimo, si deve ritenere costante l'altra variabile. Determinati in questo modo i valori di x, e di y, che fanno prendere alla formola X un valor massimo, o minimo, si avranno tutti i casi, ne' quali la formola X può divenire un massimo, o un minimo; siccome a norma del num. 320. si giudicherà de' casi, ne' quali svanendo Mdx, o Ndy, o pur tutte due ec. la formola X nè diventa un massimo, nè un minimo.

355. Debbansi ritrovare i valori di x, y, che danno alla formola $x^3+4y^2-x^2y+2y^3-12x^2=X$ un valor massimo, o minimo. La sola ispezione della data formola appalesa, che con fare $x=0$, risulta eziandio $y=0$, e però con fare $x=0$, $y=0$ tutta la formola diventa $=0$, che è un valor nullo, onde non si può dire, se non impropriamente, che la formola acquista un valor minimo allora quando è $x=0$, $y=0$. Si differenzi pertanto la formola data, e si avrà $3x^2dx+8ydy-2xydx-x^2dy+6y\,dy-24xdx$. Si separino in formole i termini moltiplicati per dx, e i termini moltiplicati per dy, delle quali la prima si faccia eguale ad M, e la seconda eguale ad N, e si avrà $M=3x^2dx-2xydx-24xdx$, o sia [A] $\frac{M}{dx}=3x^2-2xy-24x$, ed $N=8ydy-x^2dy+6y^2dy$, e però [B] $\frac{N}{dy}=8y-x^2+6y^2$. Si differenzi ancora l'equazione [A] ritenendo costante la y, e ne verrà $\frac{d.\,M}{dx}=6xdx-2ydx-24dx$, cioè [E] $\frac{d\,M}{2\,\overline{d\,x}^2}=3x-y-12$: Parimente si differenzi l'equazione [B] ritenendo costante la x, e si

avrà

avrà $\frac{dN}{dy} = 8dy + 12ydy$, vale a dire (F) $\frac{d.N}{4\overline{dy}^2} = 2 + 3y$. Fatto ciò si eguagli a zero tanto l' equazione (A), che l' equazione (B), e la prima sarà $3x - 2xy - 24x = 0$, cioè $3x - 2y - 24 = 0$ (G); e la seconda (H) $8y - x^2 + 6y^2 = 0$. Per trovare primieramente il valore di x, che può dare alla formola X un massimo, o minimo valore, si elimini la y col mezzo delle due equazioni (G), (H), e operando colle regole comuni d' eliminazione si giungerà a questa equazione

$x^2 - \frac{816x}{50} + \frac{3072}{50} = 0$, le di cui radici sono $x = \frac{204 \pm \sqrt{3216}}{25} = \frac{204 \pm 56 \cdot 71}{25}$. Isteffamente per trovare il valore di y, che può dare un massimo, o minimo valore alla formola X, si elimini la x coll' ajuto delle due equazioni (G), (H), lo che facendo si troverà la seguente equazione $y^2 - \frac{24y}{50} - \frac{575}{50} = 0$, le di cui radici sono $y = \frac{6 \pm \sqrt{7236}}{25} = \frac{6 \pm 85 \cdot 07}{25}$. Per determinare se questi ritrovati valori di x, y danno alla formola X valori massimi, o minimi, niente altro più resta a fare, che sostituire questi valori nelle equazioni (E), (F), e vedere se da una tale sostituzione i valori di queste equazioni risultano positivi, o negativi: Se saranno positivi, i ritrovati valori di x, y varranno per un minimo, e all' opposto varranno per un massimo, se i valori delle equazioni [E], [F] nasceranno negativi. Col fare adunque le accennate sostituzioni si trova

$$\frac{d.M}{2\overline{dx}^2} = \frac{3 \times \overline{204 + 56 \cdot 71}}{25} - \frac{6 - 85 \cdot 07}{25} - 12 = \frac{391 \cdot 06}{25} \text{ (C)};$$

$$\frac{d.M}{2\overline{dx}^2} = \frac{3 \times \overline{204 - 56 \cdot 71}}{25} - \frac{6 + 85 \cdot 07}{25} - 12 = \frac{220 \cdot 94}{25} \text{ (D)};$$

$$\frac{d.N}{4\overline{dy}^2} = 2 + \frac{3 \times \overline{6 + 85 \cdot 07}}{25} = \frac{323 \cdot 21}{25} \text{ (P)}; \frac{dN}{4\overline{dy}^2} = 2 + \frac{3 \times \overline{6 - 85 \cdot 07}}{25} = -\frac{187 \cdot 21}{25} \text{ (Q)}.$$

Quindi essendo positive le quantità

ARTICOLO V.

Della maniera di determinare i punti di flesso, e di regresso.

356. Abbiamo veduto all' Art. VI. Capo IV. del IV. Tomo, che in una qualunque curva quel punto diceſi di fleſſo, in cui la curva di concava paſſa ad eſſer conveſſa, o *vice verſa*, come il punto C nella curva ECD (Fig. 30.). Quel punto poi, in cui la curva ritorna indietro o concava, o conveſſa, ſi chiama punto di regreſſo, e tale è il punto C [Fig. 31., 32., 33.]

357. Per venire alla conſiderazione, e determinazione de' punti di fleſſo richiamiamo alla memoria, che trattando delle maſſime, e minime ordinate abbiamo oſſervato, che non ſempre ci vengono eſſe eſibite dalla ſuppoſizione di $dy=0$, la quale molte volte inganna, e ciò ſuccede nel caſo di fleſſi. Per rilevare quando ciò ſucceda, ſi è deſunto [al num. 320.] l' indizio dalle due eſpreſſioni

$$y > y + \frac{n\,dy}{dx} + \frac{n^2\,d^2y}{2\,\overline{dx}^2} + \frac{n^3\,d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \text{ec., e } y > y - \frac{n\,dy}{dx} + \frac{n^2\,d^2y}{2\,\overline{dx}^2}$$

$$- \frac{n^3\,d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \text{ec., ovvero } y < y + \frac{n\,dy}{dx} + \frac{n^2\,d^2y}{2\,\overline{dx}^2} + \frac{n^3\,d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \text{ec., e}$$

$$y > y - \frac{n\,dy}{dx} + \frac{n^2\,d^2y}{2\,\overline{dx}^2} - \frac{n^3\,d^3y}{6\,\overline{dx}^3} + \text{ec.,}$$ le quali hanno luogo allorchè è

$\frac{dy}{dx} = 0$, e $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} = 0$, poichè allora delle due ordinate proſſime a deſtra, e a ſiniſtra all' ordinata al punto di fleſſo, una di lei è maggiore, e l'altra è minore. Che però ciò, che caratterizza i punti di fleſſo è tanto dy, che $d^2y = 0$.

Per brevità ſi dice dy, e $d^2y = 0$, dovendoſi ſempre intendere $\frac{dy}{dx}$, e $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} = 0$, dalle quali eſpreſſioni $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} = 0$ vengono eſibite quantità finite, come ai num. 126., 323. abbiamo veduto.

358. Che poi pei punti di flesso debba essere $d^2y=0$, o pure $d^2y=\infty$ da altre considerazioni ancora possiamo raccoglierlo. E a questo fine osserviamo, che nelle curve, le quali volgono la concavità all' asse delle absc.isse, come la curva AMB [Fig. 46.], se si prenderà una serie di ordinate pM, qm, sn, ta, corrispondenti ad abscisse eguali, che è il caso di dx costante, queste ordin.te, che hanno tutte le differenze prime positive, hanno poi negative tutte le differenze s.conde: Di fatto la differenza tra l' elemento Nm, e l' elemento Qn è Qn — Nm = — nr; la differenza tra l' elemento Qn, e l' elemento ea è ea — Qn = — ab ec. Laddove pel contrario se la curva volgerà la convessità all' asse delle abscisse, come la curva AMB [Fig. 47.], con prendere una serie di ordinate pM, qm, sn, ta, non solo le loro differenze prime Nm, Qn, ea saranno positive, ma lo saranno ancora le differenze seconde Qn—Nm=nr; ea—Qn=ba ec. Ora la curva nel punto di flesso da concava passa ad essere convessa, o *vice versa* [pel num 356.] dunque le differenze seconde delle ordinate, che al di quà del punto di flesso sono positive, al di là trovansi negative, o *vice versa*. Ma [pei num. 466., 467. Tomo II.] una quantità non può passare da positiva a negativa, o da negativa o positiva, senza passare o per zero, o per l infinito; dunque la differenza seconda dell' ordinata corrispondente al punto di flesso deve essere $d^2y=0$, o pure $d^2y=\infty$.

359. Osserviamo un' altra cosa, ed è che nella curva avente un flesso, la quale da prima sia concava all' asse delle abscisse, come la curva della fig. 30., coll' andarsi continuamente aumentando l' abscissa AO, la differenza dy dell' ordinata si va facendo successivamente minore fino a tanto, che l' ordinata sia la BC, che corrisponde al punto del flesso, dopo il qual punto la detta differenza dy si va susseguentemente aumentando, e divenendo maggiore: Quindi nel punto di flesso la dy è un minimo. All' opposto nella curva avente un flesso, la quale da prima sia convessa all' asse delle abscisse, coll' andar crescendo l' absc.issa AF [Fig. 48.], cresce eziandio la differenza dy dell' ordinata, fino a che l' ordinata sia la BD, che corrisponde al punto di flesso; dopo il qual punto la differenza dy va in seguito continuamente calando; e però nel punto di flesso la dy è un massimo. La differenza adunque dy dell' ordinata essendo massima, o minima nel punto di flesso, e [pei num. 309. 310] l' espressioni dei massimi, o minimi essendo $dy=0$, ovvero $dy=\infty$, sarà pure conseguentemente pei punti di flesso la differenza di dy, cioè $d^2y=0$, ovvero $d^2y=\infty$. E siccome [pel num. 310.] l' espressione de' massimi, o de' minimi è $dy=0$, allorchè la tangente, che passa per l' estremità della massima, o minima ordinata, è parallela all' asse delle abscisse, e se è parallela all' asse delle ordinate, in tal caso l' espressione de' massimi, o minimi è $dy=\infty$; così trattandosi de' flessi, se la direzione del punto di flesso sarà parallela all' asse delle abscisse, si dovrà fare $d^2y=0$; ma se sarà parallela all' asse delle ordinate, dovrassi fare $d^2y=\infty$.

360. Ecco pertanto in più modi verificato, che rispetto ai punti di flesso deve essere $d^2y=0$, o sia $d^2y=\infty$. La stessa verità si può eziandio da altri principj dedurre; ma potendo abbondantemente bastare le cose dette, stimo superfluo il parlarne più a lungo.

361. Qualora pertanto sarà proposto di determinare il punto di flesso di una curva, della quale data sia l' equazione, si differenzi primieramente questa equazione, con che si avrà dy dato per dx, e quantità costanti: Di poi si differenzi di nuo-

nuovo, ritenendo dx coſtante, a fine di avere il valore di d^2y. Se in queſto valore di d^2y non entra $\overline{dy}^2$, ſi faccia $d^2y = 0$, ovvero $d^2y = \infty$, cioè a dire ſi eguagli a zero, o all'infinito il ritrovato valore di d^2y, indi ſe ne deduca il valore di x, con che ſi otterrà il valore dell' abſciſſa, dalla di cui eſtremità alzandoſi la corriſpondente ordinata, andrà eſſa a incontrare la curva nel cercato punto di fleſſo. Se poi nel valore di d^2y entrerà $\overline{dy}^2$, dall' equazione provenuta dalla prima differenziazione ſi prenda il valore di dy dato per dx, e quantità coſtanti, che ſi innalzi al quadrato, nel qual modo ſi avrà il valore di $\overline{dy}^2$ da ſoſtituirſi nel ritrovato valore di d^2y. Fatto ciò, da queſto valore di d^2y ſi prenda il valore di x, che, come pur ora ho detto, ſarà l'abſciſſa, la di cui ordinata andrà a incontrare la curva nel cercato punto di fleſſo. Dopo aver trovato il valore dell' abſciſſa, che compete al punto di fleſſo, ſe ſi vorrà determinare ancora il valore della corriſpondente ordinata, nient' altro avraſſi a fare, che ſoſtituire nella data equazion della curva il ritrovato valore di x, lo che farà paſſar l' equazione d'indeterminata, che era, ad eſſere determinata, in cui la y farà le veci d' incognita, e della quale ſi ritroverà il valore con riſolvere queſta equazione.

362. Prendiamo il primo eſempio dalla curva LKHFE [Fig. 49.], della quale ho determinato il punto di fleſſo coll'algebra Carteſiana al num. 679. Tomo IV.. L' equazione di queſta curva è $x^2y - b^2x - a^3 = 0$, che differenzio, e mi viene (A) $2xydx + x^2dy - b^2dx = 0$. Di nuovo differenzio queſta equazione, e fatto ciò ritrovo $2y\overline{dx}^2 + 4xdydx + x^2d^2y = 0$, da cui ricavo

$d^2y = -\frac{2y\overline{dx}^2 + 4xdydx}{x^2}$. Dalla data equazione ſi prenda il valore di y,

che è $y = \frac{b^2x + a^3}{x^2}$, e dall' equazione [A] ſi prenda il valore di dy, che è

$dy = \frac{b^2dx - 2xydx}{x^2}$, in cui ſi ſoſtituiſca il poc'anzi trovato valore di y, e

ſi avrà [B] $dy = \frac{b^2dx - \frac{2b^2x^2dx - 2a^3xdx}{x^3}}{x^2} = \frac{b^2x^2dx - 2b^2x^2dx - 2a^3xdx}{x^4}$

$= -\frac{b^2x^2dx - 2a^3xdx}{x^4}$. Si faccia $d^2y = 0$, e ne verrà

$-\frac{2y\overline{dx}^2 - 4x\,dy\,dx}{x^2} = 0$, in cui fostituendo il valore di y, e il valore di dy prefo dall' equazione [B], fi avrà

$$\frac{\frac{-2b^2x\overline{dx}^2 - 2a^3\overline{dx}^2}{x^2} - \frac{4b^2x^3\overline{dx}^2 + 8b^2x^3\overline{dx}^2 + 8a^3x^2\overline{dx}^2}{x^4}}{x^2}$$

$$= -\frac{2b^2x^3\overline{dx}^2 - 2a^3x^2\overline{dx}^2 - 4b^2x^3\overline{dx}^2 + 8b^2x^3\overline{dx}^2 + 8a^3x^2\overline{dx}^2}{x^6}$$

$= \frac{2b^2x^3\overline{dx}^2 + 6a^3x^2\overline{dx}^2}{x^6} = 0$, che fi riduce a $b^2x + 3a^3 = 0$, da cui fi ricava il valore di x, che è $x = -\frac{3a^3}{b^2}$, come è ftato trovato al citato num. 679. Tomo IV.. Ora la foftituzione di quefto valore di x riduce l' equazione data a $\frac{9a^6}{b^4}y + 3a^3 - a^3 = 0$, da cui fi prenda il valore di y, che è $y = -\frac{2b^4}{9a^3}$. Adunque il cercato punto di fleffo corrifponde all' abfciffa $AG = -\frac{3a^3}{b^2}$, la di cui ordinata, che va a terminare al punto di fleffo è $GF = -\frac{2b^4}{9a^3}$.

363. Più fpeditamente fi farebbe determinato quefto punto di fleffo con ridurre l'equazione data a quefta forma $y = \frac{b^2x + a^3}{x^2}$. Effa fi differenzi, e fi

avrà

avrà $dy = \frac{b^2x^2dx - 2xdx \times \overline{b^2x + a^3}}{x^4} = -\frac{b^2xdx - 2a^3dx}{x^3}$.

Si differenzi ancora questa equazione, e ne verrà $d^2y =$

$$-\frac{b^2x^3\overline{dx}^2 + 3b^2x^3\overline{dx}^2 + 6a^3x^2\overline{dx}^2}{x^6} = \frac{2b^2x\overline{dx}^2 + 6a^3\overline{dx}^2}{x^4}.$$

Si faccia $d^2y = 0$, e si avrà $\frac{2b^2x\overline{dx}^2 + 6a^3\overline{dx}^2}{x^4} = 0$, cioè $b^2x + 3a^3 = 0$, da cui si ottiene il valore di x, che è $x = -\frac{3a^3}{b^2}$.

364. Cerchiamo in secondo luogo se la curva ABHDE (Fig. 50.) ha punti di flesso, e dove li ha. L'equazione di questa curva è $b^3y + x^4 - b^2x^2 = 0$, che differenzio, e mi viene $b^3dy + 4x^3dx - 2b^2xdx = 0$. Di questa prendo ancora il differenziale, che è $b^3d^2y + 12x^2\overline{dx}^2 - 2b^2\overline{dx}^2 = 0$, da cui ricavo $d^2y = -\frac{\overline{12x^2 + 2b^2}}{b^3} \times \overline{dx}^2$. Con eguagliare a zero questo valore di d^2y, ritrovo $-\frac{\overline{12x^2 + 2b^2}}{b^3} \times \overline{dx}^2 = 0$, che si riduce a $12x^2 = 2b^2$, e però il valore di x è $x = \pm b\sqrt{\frac{1}{6}}$. Si sostituisca questo valore di x nella proposta equazione $b^3y + x^4 - b^2x^2 = 0$, e con ciò essa si cambierà nella seguente $b^3y + \frac{1}{36}b^4 - \frac{1}{6}b^4 = 0$, da cui si ottiene il valore di y, che è $y = \frac{5b}{36}$. Quindi la curva ABHDE ha due punti di flesso, che sono F, G, che corrispondono alle abscisse HK $= b\sqrt{\frac{1}{6}}$, HM $= -b\sqrt{\frac{1}{6}}$, che hanno per ordinate KG $= \frac{5b}{36}$, MF $= \frac{5b}{36}$.

365. Ne' due precedenti esempj ho preso a determinare tali punti di flesso, che avevano direzioni parallele all'asse delle abscisse, rispetto a' quali devesi fare (pel num. 359.) $d^2y = 0$: Ora prenderò il terzo esempio dalla curva KHGF (Fig. 52.), la quale ha due punti di flesso tali, che uno ha direzione parallela all' asse delle abscisse, e l'altro ha direzione parallela all' asse delle ordinate. Di questa curva l'equazione è $2x^3 + y^3 + 3^4 = 0$. Per abbreviare il calcolo, si riduca

questa equazione alla seguente forma $y = -\overline{2x^3 - 3^4}^{\frac{1}{3}}$. Essa si differenzi, e ne

verrà $dy = -2x^2dx \times -\overline{2x^3 - 3^4}^{\frac{1}{3}-1} = -2x^2dx \times -\overline{2x^3 - 3^4}^{-\frac{2}{3}}$, che

differenzio ancora, ed ho $d^2y = -4x\overline{dx}^2 \times -\overline{2x^3 - 3^4}^{-\frac{2}{3}}$

$-8x^4\overline{dx}^2 \times -\overline{2x^3 - 3^4}^{-\frac{2}{3}-1} = -4x\overline{dx}^2 \times -\overline{2x^3 - 3^4}^{-\frac{2}{3}}$

$-8x^4\overline{dx}^2 \times -\overline{2x^3 - 3^4}^{-\frac{5}{3}} =$

$\dfrac{-4x\overline{dx}^2}{\sqrt[3]{\overline{-2x^3-3^4}^2}} \quad \dfrac{-8x^4\overline{dx}^2}{-2x^3-3^4\sqrt[3]{\overline{-2x^3-3^4}^2}}$. Per lo che facendo $d^2y = 0$, si ha

$\dfrac{-4x\overline{dx}^2}{\sqrt[3]{\overline{-2x^3-3^4}^2}} \quad \dfrac{-8x^4\overline{dx}^2}{-.x^3-3\sqrt[3]{\overline{-2x^3-3^4}^2}} = 0$, che mediante la riduzione

allo stesso denominatore, e con fare le convenienti divisioni, diventa $+4 \times 3^4x = 0$, da cui si prenda il valore di x, e si avrà $x = 0$. Si sostituisca questo valore di x nell'equazione proposta $y^3 + 2x^3 + 3^4 = 0$, e ne verrà $y^3 + 3^4 = 0$,

da cui si ricava $y = \sqrt[3]{-3^4} = -4.32$. Ed ecco determinato il punto di flesso H, che ha direzione parallela all'asse delle abscisse BC, che corrisponde all' abscissa $x = 0$, ed è all'estremità dell'ordinata AH $= 4.32$. Per determinare l' altro punto di flesso, che ha direzione parallela all' asse delle ordinare, dovendosi fare $d^2y = \infty$, si ponga $= \infty$ il precedente trovato valore di d^2y, e si avrà

— 4x

$$\frac{-4x\,\overline{dx}^2}{\sqrt[3]{\overline{-2x^3-3^4}}^{\,2}} \quad \frac{-8x^4\overline{dx}^2}{\overline{-2x^3-3^4}\sqrt[3]{\overline{-2x^3-3^4}}^{\,2}} = \infty$$, o sia (riducendo allo stesso denominatore) $$\frac{-4x\,\overline{dx}^2 \times \overline{-2x^3-3^4} - 8x^4\,\overline{dx}^2}{\overline{-2x^3-3^4}\sqrt[3]{\overline{-2x^3-3^4}}^{\,2}} = \infty.$$ Ma questa quantità non è eguale all' infinito, se non in quanto che il di lei denominatore è eguale a zero; che però si faccia $-\overline{2x^3-3^4}\sqrt[3]{\overline{-2x^3-3^4}}^{\,2} = 0$, che si riduce a $-2x^3-3^4=0$, da cui prendendosi il valore di x, si ha

$x = \sqrt[3]{-\frac{3^4}{2}} = \sqrt[3]{-40.5} = -3.43$.. Si sostituisca nell'equazione data $y^3+2x^3+3^4=0$ questo ritrovato valore di $x^3 = -\frac{3^4}{2}$, e con ciò essa si cambierà nella seguente $y^3-3^4+3^4=0$, cioè $y^3=0$, che dà $y=0$. Resta pertanto determinato il punto di flesso G, che ha direzione parallela all' asse ED delle ordinate, il quale corrisponde all' abscissa negativa $AG = -3.43$, cui compete l'ordinata $y=0$.

366. Ogniqualvolta nel determinare se una curva ha punti di flesso, dalla supposizione di $d^2y=0$, ovvero di $d^2y=\infty$ ne risulterà un' assurdo, ciò sarà segno, che la curva non ha punti di flesso secondo la supposta direzione. Vediamone l'esempio nella curva ABCD [Fig.51.], la di cui equazione è $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$. Differenziando questa equazione si ha $2a^2ydy+2b^2xdx=0$, che differenzio di nuovo [dx è costante], e mi viene $2a^2\overline{dy}^2+2a^2yd^2y+2b^2\overline{dx}^2=0$, da cui prendo il valore di d^2y, che è $d^2y = \frac{-b^2\overline{dx}^2 - a^2\overline{dy}^2}{a^2y}$, in cui sostituisco il valore di $\overline{dy}^2$ preso dall' equazione $a^2ydy+b^2xdx=0$, con fare $dy = -\frac{b^2xdx}{a^2y}$, ed innalzarla al quadrato, con che si ha

$\overline{dy}^2 = \frac{b^4x^2\overline{dx}^2}{a^4y^2}$, onde ne viene $d^2y =$

$$\frac{-b^2\overline{dx}^2 - \frac{b^4x^2\overline{dx}^2}{a^2y^2}}{a^2y} = \frac{-a^2b^2y^2\overline{dx}^2 - b^4x^2\overline{dx}^2}{a^4y^3}$$, la quale, mediante la so-

stituzione de' valori di y^2, y^3 presi dalla data equazione $a^2y^2 + b^2x^2 - b^2a^2 = 0$,

diventa $d^2y = \frac{b^4x^2\overline{dx}^2 - a^2b^4\overline{dx}^2 - b^4x^2\overline{dx}^2}{a^4 \times \overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}}$

$= \frac{-b^4\overline{dx}^2}{a^2 \times \overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}}$. Si faccia $d^2y = 0$, e si avrà

$0 = \frac{-b^4\overline{dx}^2}{a^2 \times \overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}}$, vale a dire $0 = -b^4$ quantità

assurda, mentre una quantità costante non può essere eguale a zero. La proposta curva adunque non ha punti di flesso, la di cui direzione sia parallela all' asse delle abscisse. Cerchiamo ora se abbia punti di flesso, de' quali la direzione sia parallela all' asse delle ordinate; e a tal fine prendiamo il poc' anzi trovato valore di d^2y, e facciamolo eguale all' infinito così

$\infty = \frac{-b^4\overline{dx}^2}{a^2 \times \overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}}$, da cui si ottiene

$\infty \times a^2$

Digitized by Google

$\infty \times a^2 \times \overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2} = -b^4$, dove il primo membro è una quantità infinita, e il secondo una quantità costante; che però essendo assurdo, che una quantità costante sia eguale all'infinito, ne segue, che la curva ABCD nemmeno ha punti di flesso, la di cui direzione sia parallela all' asse dell'ordinate.

367. Più speditamente si sarebbe trovato il valore di d^2y con ridurre prima l'equazione proposta alla seguente forma $y =$

$\overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}^{\frac{1}{2}}$. Si differenzi questa equazione, e si avrà $dy =$

$-\frac{b^2}{a^2}xdx \times \overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}^{-\frac{1}{2}}$, che si differenzi di nuovo, e ne verrà

$$d^2y = -\frac{b^2}{a^2}\overline{dx}^2 \times \overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}^{-\frac{1}{2}} - \frac{b^4}{a^4}x^2\,\overline{dx}^2 \times \overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}^{-\frac{3}{2}},$$

o sia $d^2y = -\dfrac{\frac{b^2}{a^2}\overline{dx}^2 \times \overline{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2} - \frac{b^4}{a^4}x^2\,\overline{dx}^2}{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}}$, che con fare $d^2y = 0$ si riduce a $0 = -b^4$, come si è trovato di sopra.

368. Non solamente poi con fare $d^2y = 0$ si determinano i punti di flesso, la di cui direzione è parallela all' asse delle abscisse, ma quelli ancora, de' quali la direzione a quest' asse è obliqua. Ci servirà d' esempio la curva ABCDE (Fig. 53.) la di cui equazione è $ay^2 + x^3 + bx^2 = 0$, che riduco a questa forma

$y = \sqrt{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}$, o sia $y = \overline{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}^{\frac{1}{2}}$. Si differenzi questa equa-

Digitized by Google

zione, e ne verrà $dy = -\overline{\frac{3x^2dx}{2a} - \frac{bxdx}{a}} \times \overline{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}^{\,-\frac{1}{2}}$, che differenzio

ancora, e ritrovo $d^2y = -\overline{\frac{3x\,\overline{dx}^2}{a} - \frac{b\,\overline{dx}^2}{a}} \times \overline{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}^{\,-\frac{1}{2}}$

$$+ \overline{\frac{3x^2dx}{2a} + \frac{bxdx}{a}} \times - \overline{\frac{3x^2dx}{2a} - \frac{bxdx}{a}} \times \overline{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}^{\,-\frac{3}{2}},$$

che riduco alla seguente forma $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} =$

$$\frac{-\overline{\frac{3x}{a} - \frac{b}{a}} \times \overline{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}} + \overline{\frac{3x^2}{a} + \frac{bx}{a}} \times \overline{-\frac{3x^2}{2a} - \frac{bx}{a}}}{\overline{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}\sqrt{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}} =$$

$$\frac{\frac{3x^4}{a^2} + \frac{bx^3}{a^2} + \frac{3bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{9x^4}{4a^2} - \frac{3bx^3}{2a^2} - \frac{3bx^3}{2a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2}}{\overline{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}\sqrt{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}}$$

$$= \frac{\frac{3x^4}{4a^2} + \frac{bx^3}{a^2}}{\overline{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}\sqrt{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}}.$$ Si faccia $d^2y = 0$, e ne verrà

Digitized by Google

$$\frac{\frac{3x^4}{4a^2}+\frac{bx^3}{a^2}}{-\frac{x^3}{a}-\frac{bx^2}{a}\sqrt{-\frac{x^3}{a}-\frac{bx^2}{a}}}=0,$$ che si riduce a $\frac{3x^4}{4a^2}+\frac{bx^3}{a^2}=0$, da cui si prenda il valore di x, che è $x=-\frac{4}{3}b$. Mediante la sostituzione di questo valore di x l'equazione proposta $ay^2+x^3+bx^2=0$ si riduce ad $ay^2-\frac{64}{27}b^3+\frac{16}{9}b^3=0$, dalla quale si prenda il valore di y, che è $y=\pm\sqrt{\frac{16b^3}{27a}}=\pm\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}}$. Questa curva adunque ABCDE ha due punti di flesso D, B, che corrispondono all'abscissa negativa Gb $=-\frac{4}{3}b$, e sono alle estremità delle ordinate bD $=\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}}$, bB $=-\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}}$, de' quali punti di flesso le direzioni sono am, an oblique all' asse FG delle abscisse.

369. Se con fare $d^2y=\infty$ si fosse ricercato se questa curva ha punti di flesso, la di cui direzione sia parallela all' asse delle ordinate, da tale supposizione ne sarebbe risultata una quantità assurda, la quale dà a vedere, che la curva è priva di tali punti di flesso.

370. Adunque la direzione di un qualunque punto di flesso non potendo essere, che o parallela all' asse delle ordinate, nel qual caso si viene alla determinazione di questo punto con fare $d^2y=\infty$; o pure parallela all' asse delle abscisse, o al medesimo inclinata, e in allora si determina questo punto di flesso con fare $d^2y=0$, ben si vede, che ogniqualvolta verrà proposto di determinare se ha punti di flesso una curva, di cui sia data l'equazione, niente altro dovrassi fare, che supporre primieramente $d^2y=0$, poi $d^2y=\infty$, e osservare se da queste supposizioni nascano, o no quantità assurde: Se sì, la curva sarà immune da punti di flesso; se no, i valori di x, che provengono da queste supposizioni, determineranno le abscisse, cui corrispondono punti di flesso di direzione parallela, o obliqua all' asse delle abscisse nel caso di $d^2y=0$, e di direzione parallela all' asse delle ordinate nel caso di $d^2y=\infty$.

Digitized by Google

371. Se dopo aver determinati i punti di flesso, che può avere una curva proposta, si vorrà conoscere la posizione della tangente che compete a loro, bisognerà operare a norma del num. 260. Così rispetto al precedente esempio del num. 368. se si vorrà ravvisare la posizione delle tangenti, che convengono ai ritrovati punti di flesso D, B (Fig. 53.), si prenda la prima equazione differenziale $dy = -\overline{\frac{3x^2dx}{2a} - \frac{bxdx}{a}} \times \overline{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}^{-\frac{1}{2}}$, dalla quale si prenda il valore di $\frac{dy}{dx}$, che è $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{3x^2}{2a} - \frac{bx}{a}}{\sqrt{-\frac{x^3}{a} - \frac{bx^2}{a}}} =$

$$-\frac{\frac{3x^2 - 2bx}{2a}}{\frac{x\sqrt{-x-b}}{\sqrt{a}}} = -\frac{3x-2b}{2\sqrt{a}\sqrt{-x-b}}.$$ Avendosi adunque

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x-2b}{2\sqrt{-ax-ab}}$, e la frazione $\frac{dy}{dx}$ esibendo il rapporto, che ha il seno al coseno dell'angolo, che fa la tangente coll'asse delle abscisse, resta con ciò determinata la posizione delle due tangenti am, an, o sia l'angolo, che esse fanno coll'asse delle abscisse, mentre si è trovato, che il seno di quest'angolo sta al suo coseno, come $-3x-2b : 2\sqrt{-ax-ab}$, che, mediante la sostituzione dell'antecedentemente trovato valore di $x = Gb = -\frac{4}{3}b$, diventa $b : \sqrt{\frac{ab}{3}}$, cioè $\sqrt{3}b : \sqrt{a}$ rapporto cercato, dal quale restano determinati gli angoli Bab, Dab.

372. La stessa maniera d'operare ci porta a determinare que' punti di flesso, che sono nel tempo stesso punti moltiplici. Che se dopo aver determinato il punto di flesso, si vorrà scoprire, se egli è un punto semplice, ovvero un punto moltiplice, ciò si ravviserà facilmente con trovare (nel modo praticato al preced. num. 371.), se a questo punto di flesso compete una sola, o più tangenti, mentre se gli si troveranno convenire più tangenti, ciò sarà segno, che egli è un punto moltiplice, e il grado della di lui moltiplicità verrà indicato dal numero delle tangenti: Se poi gli si troverà competere una sola tangente, ciò mostrerà, che egli è un punto semplice, a riserva però del caso, che fosse un punto d'oscul-

cul-infleffione, del che fi potrà accertare con foftituire nell' equazion data il valore dell' abfciffa, che conviene a quel tal punto, e vedere fe a quefta abfciffa compete una fola, o pur due ordinate eguali: Nel primo cafo il fleffo farà un punto femplice, nel fecondo farà un punto doppio, che farà un' ofcul-infleffione. Acciò fi veda in pratica quanto ho detto de' punti di fleffo, che fono nel tempo fteffo punti moltiplici, cerchiamo fe ha punti di fleffo la curva EKRNFMB QBRGPGHE [Fig 54. il di cui andamento viene moftrato dall' ordine delle notate lettere], e avendone, fe fono punti femplici, o moltiplici. L' equazione di quefta curva è $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 4y^4 - 8y^2\sqrt{2} + 8 = 0$ [l' affe delle abfciffe è la retta DC, delle ordinate è la retta GB, e il punto A è l' origine delle coordinate),

che riduco a quefta forma $y^2 = \sqrt{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x^2}$, quale differenzio, e mi viene $2ydy = -\frac{\overline{x^1 + 3x^2 + 4x}}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x^2}} \times dx =$

$\frac{\overline{-x^2 + 3x + 4}}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + x + 2}} \times dx$, da cui ricavo $\overline{dy}^2 = \frac{\overline{-x^2 + 3x + 4}^2}{16y^2 \times \overline{-\frac{1}{4}x^2 + x + 2}} \times \overline{dx}^2$.

Differenzio l'equazione $2ydy = \frac{\overline{-x^2 + 3x + 4}}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + x + 2}} \times dx$ ritenendo coftante dx,

e ritrovo $2\overline{dy}^2 + 2yd^2y =$

$$\frac{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + x + 2} \times \overline{-2x + 3} \times \overline{dx}^2 - \frac{\overline{-x^2 + 3x + 4} \times \overline{\frac{1}{2}x - 1} \times \overline{dx}^2}{\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + x + 2}}}{4 \times \overline{-\frac{1}{4}x^2 + x + 2}} =$$

2X

$$\frac{2\times\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}\times\overline{-2x+3}\times\overline{dx}^2 \;\; \overline{-x^2+3x+4}\times\overline{\frac{1}{2}x-1}\times\overline{dx}^2}{4\sqrt{\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}^3}}\text{, e però}$$

$$d^2y = \frac{2\times\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}\times\overline{-2x+3}\times\overline{dx}^2}{8y\sqrt{\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}^3}} -$$

$$\frac{\overline{x^2+3x+4}\times\overline{\frac{1}{2}x-1}\times\overline{dx}^2 - 8\sqrt{\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}^3}\times\overline{dy}^2}{8y\sqrt{\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}^3}}.$$

Eguaglio a zero questo ritrovato valore di d^2y, con che ho $0 =$

$2\times\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}\times\overline{-2x+3}\times\overline{dx}^2 - \overline{x^2+3x+4}\times\overline{\frac{1}{2}x-1}\times\overline{dx}^2 -$

$8\sqrt{\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}^3}\times\overline{dy}^2$, che mediante la sostituzione del valore di

$\overline{dy}^2$ diventa $2\times\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}\times\overline{-2x+3}\times\overline{dx}^2$ —

$\overline{-x^2+3x+4} \times \overline{\frac{1}{2}x-1} \times \overline{dx}^2 - 8\sqrt{\overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}^3} \times \frac{\overline{-x^2+3x+4}^2 \times \overline{dx}^2}{16y^2 \times \overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2}} = 0,$

cioè

$32y^2 \times \overline{-\frac{1}{4}x^2+x+2} \times \overline{-2x+3} \times \overline{dx}^2 - \overline{-x^2+3x+4} \times \overline{16y^2} \times \overline{\frac{1}{2}x-1} \times \overline{dx}^2 -$

$8\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2} \times \overline{-x^2+3x+4}^2 \times \overline{dx}^2 = 0$, che con fare le indicate moltiplicazioni si riduce alla seguente $32y^2 \times \overline{\frac{2}{4}x^3-2x^2-4x-\frac{3}{4}x^2+3x+6} \times \overline{dx}^2 +$

$16y^2 \times \overline{-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{2}x+x^2-3x-4} \times \overline{dx}^2 -$

$8\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2} \times \overline{-x^2+3x+4}^2 \times \overline{dx}^2 = 0$, o sia

$8y^2 \times \overline{2x^3-8x^2-16x-3x^2+12x+24} \times \overline{dx}^2 + 8y^2 \times \overline{-x^3+3x^2+4x+2x^2-6x-8} \times \overline{dx}^2$

$- 8\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2} \times \overline{-x^2+3x+4}^2 \times \overline{dx}^2 = 0$, che con togliere i termini elidentisi diventa $8y^2\,\overline{dx}^2 \times \overline{x^3-6x^2-6x+16}$

$- 8\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2} \times \overline{-x^2+3x+4}^2 \times \overline{dx}^2 = 0$, vale a dire [mediante il fare la divisione per $8\,\overline{dx}^2$] $y^2 \times \overline{x^3-6x^2-6x+16} -$

$\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2} \times \overline{-x^2+3x+4}^2 = 0$, la quale equazione stante la sostituzione del valore di y^2 passa ad essere

$$\overline{x^3-6x^2-6x+16} \times \sqrt{2} + \overline{x^3-6x^2-6x+16} \times \pm x\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2}$$

$$-\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2} \times \overline{-x^2+3x+4}^{\,2} = 0,$$ che riduco alla ſeguente forma

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2}} = \mp x + \frac{\overline{(-x^2+3x+4}^{\,2}}{x^3-6x^2-6x+16},$$ o ſia (facendo valere il ſegno +)

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2}} = +x + \frac{x^4-6x^3+x^2+24x+16}{x^3-6x^2-6x+16},$$ vale a dire

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2}} = \frac{2x^4-12x^3-5x^2+40x+16}{x^3-6x^2-6x+16}$$ [con ridurre il ſecondo membro dell' equazione allo ſteſſo denomiuatore, indi togliere i termini, che ſi elidono]. Si innalzi al quadrato l' uno, e l' altro membro di queſta equazione, e ſi avrà

$$\frac{2}{-\frac{1}{4}x^2+x+2} =$$

$$\frac{4x^8-48x^7+124x^6+280x^5-871x^4-784x^3+1760x^2+1280x+256}{x^6-12x^5+24x^4+104x^3-156x^2-192x+256},$$ che con levare i denominatori, e togliere i termini, che ſi elidono, ſi riduce alla ſeguente $4x^{10}-64x^9+284x^8+168x^7-2975x^6+364x^5+12056x^4+1344x^3-20192x^2-12800x=0$, la quale oltre la radice $x=0$ non ne ha alcun' altra, che ſoſtituita nell' equazione propoſta in luogo di x, renda reale il valore di y. Ora l' equazione data mediante la ſoſtituzione di zero in luogo di x ſi riduce a $4y^4-8y^2\sqrt{2}+8=0$, da cui ſi ricava $y=\pm\sqrt{\sqrt{2}}$. Quindi la curva ha due punti di fleſſo all' eſtremità delle due ordinate $+\sqrt{\sqrt{2}}$, e $-\sqrt{\sqrt{2}}$ corriſpondenti all' abſciſſa eguale a zero, i quali punti ſono B, G. Ma per rilevare col calcolo ſe queſti punti di fleſſo ſono punti ſemplici, ovvero moltiplici, ſi cerchi il numero delle tangenti, che gli competono, e a queſto fine per mezzo della prima equa-

zio-

zione differenziale ſi trovi il rapporto di dx a dy, che è $\frac{dx}{dy} =$

$$\frac{4y\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2}}{-x^2+3x+4} = \frac{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+x+2}\times\pm\sqrt{\sqrt{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2}}}{-x^2+3x+4}$$

(con ſoſtituirci il valore di y), che con fare $x=0$ ſi riduce a $\pm\frac{4\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}}}{4}$

$=\pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}}}{1}$. Eſſendo pertanto doppio il rapporto di dx a dy, due ſono le tangenti, che competono a ciaſcun punto B, G di fleſſo, e però eſſi ſono punti doppj. Poichè adunque ſi è trovato $dx : dy :: \pm\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}} : 1$, lo che fa vedere, che il ſeno dell'angolo, che fa la tangente coll' aſſe delle abſciſſe ſta al coſeno come $1 : \pm\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}} = \pm 1.55$, ſi prenda ſu l' aſſe GB delle ordinate la porzione $Am=1$, e ſu l' aſſe delle abſciſſe le porzioni $An=1.55$, ed $Aa=-1.55$, indi ſi conducano le rette mn, ma; poſcia pel punto B ſi tirino parallele alle mn, ma le rette BC, BD, che ſaranno le due tangenti, che competono al punto B. Lo ſteſſo ſi faccia riſpetto al punto G.

Ho detto, che l' equazione $4x^{10}-64x^9+284x^8+168x^7-2975x^6+364x^5+12056x^4+1344x^3-20192x^2-12800x=0$ oltre la radice $x=0$ non ne ha alcun' altra, che ſoſtituita nell' equazione $x^4-4x^3-8x^2+4y^4-8y^2\sqrt{2}+8=0$ dia reale il valore di y, poichè acciò l' ordinata y ſia reale, biſogna che il valore di x cada fra queſti due termini 5.46, e -1.46, fra' quali termini l' equazione $4x^9-64x^8+284x^7+168x^6-2975x^5+364x^4+12056x^3+1344x^2-20192x-12800=0$ non ha alcuna radice, come ſe ne può accertare coſtruendo queſta equazione col metodo eſpoſto all' Art. II. Capo V. del Tomo IV.

374. Stante la proprietà, che (giuſta il num. 356.) compete al punto di fleſſo, di far cioè, che la curva, la quale era concava all' aſſe paſſi ad eſſer conveſſa, o *vice verſa*, abbiamo la maniera di conoſcere, ſe una curva, di cui è data l' equazione, poſſa avere, o no punti di fleſſo, avanti di venirne alla determinazione. A tale cognizione poi ſi giungerà con iſcoprire ſe la curva volta coſtantemente la concavità, o la conveſſità all' aſſe, lo che ſi ottiene con prendere il rapporto di dx a dy, e vedere ſe dy coſtantemente creſce, o cala, mentre il primo caſo indicherà, che la curva è conveſſa all' aſſe, e il ſecondo, che è concava; e che però nè in uno, nè nell' altro di queſti caſi può la curva avere punti di fleſſo. Ci ſerva d' eſempio la curva, di cui l' equazione è $y^2+2by-ax+ab+b^2=0$. Differenzio queſta equazione, e mi viene $2ydy+2bdy-adx=0$, che meſſa in proporzione ſomminiſtra $dy : dx :: a : 2y+2b :: a : 2\sqrt{a}\times\sqrt{x-b}$, con ſoſtituire in luogo di y il ſuo valore, che è $=-b+\sqrt{a}\times\sqrt{x-b}$. Eſſendo adunque $dy : dx :: a : 2\sqrt{a}\times\sqrt{x-b}$, egli è evidente, che col creſcere l' abſciſſa x, de-

 cre-

Digitized by Google

cresce la ragione di a a $2\sqrt{a}\times\overline{x-b}$; laonde essendo [per ipotesi] dx costante, e dovendo decrescere la ragione di dy a dx, deve necessariamente decrescere la dy. La curva adunque dell' equazione $y^2+2by-ax+ab+b^2=0$ volta costantemente la concavità all' asse, e in conseguenza non può avere punti di flesso.

375. Fin' ora ho esposto il modo di determinare i punti di flesso in quelle curve, che sono riferite all' asse, o diametro; ora passerò a trattare la stessa materia rispetto a quelle curve, che sono riferite al foco. Per farlo adunque siano le due curve ADE (Fig. 55., 56.), e il punto Q il loro foco, al quale la curva nella Fig. 55. volta da prima la concavità, e poi dopo il punto di flesso la convessità, e nella Fig. 56. volta da prima al medesimo la convessità, e poi la concavità. Dal foco Q si conduca all' una, e all' altra curva una qualunque ordinata QD, alla quale infinitamente prossima si tiri la Qd. A queste due ordinate si alzino normali sul punto Q le due rette QT, Qt, cioè QT normale alla QD, e Qt normale alla Qd. Ai punti D, d si conducano le tangenti TD, td, che vadano a incontrare in T, t le normali QT, Qt. Fatto centro in Q si descriva col raggio QD l' archetto infinitesimo DM, e col raggio QT l' archetto infinitesimo TH; e nella Fig. 56 si prolunghi la Qt fino in H; per lo che la QH tanto nella Fig. 55., che nella Fig. 56. incontrerà la DT nel punto O. Fatto ciò osserviamo, che nella curva della Fig. 55. concava da prima al foco Q la sottotangente Qt, col crescer che fanno le ordinate, risulta sempre maggiore della sottotangente QT, fintanto che la di lei corrispondente ordinata vada a incontrare il punto di flesso, dopo del quale se si condurranno altre ordinate colle loro convenienti tangenti, ne risulterà la Qt sempre minore di QT. All' opposto nella curva della Fig. 56. da prima convessa all'asse col crescere le ordinate la sottotangente Qt sarà sempre minore della sottangente QT fintanto, che la corrispondente ordinata vada a incontrare il punto di flesso, dopo del quale la Qt comincierà, e continuerà sempre a farsi maggiore della QT. Quindi nella Fig. 55. l' intercetta Ot, che era positiva, e negativa nella Fig. 56., avanti che l'ordinata arrivasse al punto di flesso, dopo che l' ordinata avrà passato il punto di flesso, diverrà negativa nella Fig. 55., e positiva nella Fig. 56. Fa adunque di mestiere (pei num. 466., 467. Tomo II.), che Ot sia $=0$. o pure $=\infty$, allorchè l'ordinata va a incontrare la curva nel punto di flesso. Che però per determinare i punti di flesso nelle curve riferite al foco, devesi trovare il valore dell' intercetta Ot, e farlo eguale a zero, ovvero all' infinito: Si farà eguale all' infinito allorchè la direzione del punto di flesso coinciderà coll' ordinata, che dal foco va allo stesso punto; fuori poi di questo caso si dovrà fare $Ot=0$.

376. Per determinar ora il valore dell' intercetta Ot, si dica QD$=y$, DM$=dx$, M$d=dy$, e dalla similitudine de'due triangoli dDM, DTQ si deduca Md $(=dy)$: MD $(=dx)$:: QD $(=y)$: QT $\left(=\frac{ydx}{dy}\right)$. In oltre dalla similitudine de' due settori DQM, TQH si ricava QD $(=y)$: DM $(=dx)$:: QT $\left(=\frac{ydx}{dy}\right)$:TH $\left(=\frac{\overline{dx}^2}{dy}\right)$; e siccome sono pure simili i due triangoli dQO, THO, perciò si

ha

ha dQ, o sia DQ (=y) : QO, o sia QT (= $\frac{y\,dx}{dy}$) :: TH (= $\frac{\overline{dx}^2}{dy}$) : HO (= $\frac{\overline{dx}^3}{\overline{dy}^2}$). Ma H$t$ è il differenziale di QT, dunque si differenzi $\frac{y\,dx}{dy}$, che si è trovato essere il valore di QT, e ne verrà $\frac{dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y}{\overline{dy}^2}$ (con ritenere dx costante) = Ht. Ora Ot = tH + HO = $\frac{dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y + \overline{dx}^3}{\overline{dy}^2}$, quindi $\overline{dy}^2 - y\,d^2y + \overline{dx}^2 = 0$, o pure $\overline{dy}^2 - y\,d^2y + \overline{dx}^2 = \infty$ è la formola generale, che serve a determinare i punti di flesso nelle curve riferite al foco.

377. Da questa formola $\overline{dy}^2 - y\,d^2y + \overline{dx}^2 = 0$ si ricava $d^2y = \frac{\overline{dy}^2 + \overline{dx}^2}{y}$; onde se l'ordinata y si supporrà infinita, sarà $\frac{\overline{dy}^2 + \overline{dx}^2}{y} = \frac{\overline{dy}^2 + \overline{dx}^2}{\infty} = 0$, e in conseguenza la formola generale pei punti di flesso in questo caso sarà $d^2y = 0$, ovvero $d^2y = \infty$.

378. Data essendo pertanto l'equazion della curva, della quale vogliansi determinare i punti di flesso, si differenzi questa equazione replicatamente, e si prenda il valore di $\overline{dy}^2$ espresso da $\overline{dx}^2$, e di d^2y espresso da $\overline{dx}^2$, indi si sostituiscano questi valori nella formola generale $\overline{dy}^2 - y\,d^2y + \overline{dx}^2 = 0$, o sia $= \infty$, la quale sarà divisibile per $\overline{dx}^2$, e così spariranno tutti i differenziali. Dopo ciò si prenda dalla medesima il valore di y, che servirà a trovare il punto di flesso in questo modo: Con una retta si esprima questo valore di y, e col compasso si prenda la lunghezza di tale retta, poscia fatto centro in Q si descriva con questa apertura un circolo, che intersecherà la curva, nel cercato punto di flesso.

379. Un solo esempio metterà sotto agli occhi le operazioni da farsi. Si debba determinare il punto di flesso, che ha la curva ABCD (Fig. 57.), le di cui or-

di-

dinate partono dal punto **A**, e della quale l'equazione è $dx = \frac{dy}{1+y^2}$.

Si differenzi questa equazione ritenendo dx costante, e ne verrà

$$0 = \frac{\overline{1+y^2} \times d^2y - 2y\,\overline{dy}^2}{\overline{1+y^2}^2}$$, da cui si prenda il valore di d^2y, che è

$d^2y = \frac{2y\,\overline{dy}^2}{1+y^2}$: In oltre dalla data equazione $dx = \frac{dy}{1+y^2}$ si prenda il valore di $\overline{dy}^2$, che è $\overline{dy}^2 = \overline{1+y^2}^2 \times \overline{dx}^2$, che sostituito nel ritrovato valore di d^2y, lo riduce $= 2y \times \overline{1+y^2} \times \overline{dx}^2$. Ora si prenda la formola $\overline{dy}^2 - y\,d^2y + \overline{dx}^2 = 0$, che mediante la sostituzione de' ritrovati valori di $\overline{dy}^2$, e d^2y diverrà $\overline{1+y^2}^2 \times \overline{dx}^2 - 2y^2 \times \overline{1+y^2} \times \overline{dx}^2 + \overline{dx}^2 = 0$, cioè (con fare le convenienti operazioni, e dividerla per $\overline{dx}^2$) $1 + 2y^2 + y^4 - 2y^2 - 2y^4 + 1 = -y^4 + 2 = 0$, da cui si prenda il valore di y, che trovasi essere $y = 2^{\frac{1}{4}}$. Adunque fatto centro in **A** si descriva col raggio $AC = 2^{\frac{1}{4}}$ l'arco FCG, che intersecherà in C la curva ABCD, e però il punto C sarà il cercato punto di flesso.

380. Dopo aver dato il modo di trovare i punti di flesso, conviene espor la maniera di determinare i punti di regresso. Questi punti si distinguono in due spezie, come già abbiamo veduto all'Art. VI. C IV. T. IV. I punti di regresso propriamente tali, e che diconsi della prima spezie, sono quelli, che risultano da una semi-osculazione di due rami di curva, che vicendevolmente si rivoltano la loro convessità, e tale è il punto A [Fig. 58.]. I punti di regresso della seconda spezie nascono da un semi-abbracciamento di due rami di curva, che rivoltano a una stessa parte la loro concavità: e tale è il punto C [Fig. 32., 33.]. Col metodo de' massimi, e de' minimi si determinano [giusta i n. 328. 329. 330.] i punti di regresso della seconda spezie, del che ivi ne abbiamo già veduti gli esempj. Quanto poi ai punti di regres-so

so della prima spezie, essi si determinano collo stesso metodo, che ha servito a determinare i punti di flesso. Ne prenderò l'esempio dalla curva BAC della Fig. 58., la di cui equazione è $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + ay^2 - 2aby + ab^2 + a^3 = 0$. Per isfuggire l'imbarazzo delle sostituzioni, riduco primieramente l'equazione data alla seguente forma $y =$

$$b - \overline{-\frac{x^3}{a} - 3x^2 - 3ax - a^2}^{\,\frac{1}{2}}$$, che differenziata diventa $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{1}{2} \times \overline{-\frac{3x^2}{a} - 6x - 3a} \times \overline{-\frac{x^3}{a} - 3x^2 - 3ax - a^2}^{\,-\frac{1}{2}}$$. Differenzio di

nuovo questa equazione, e mi viene $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} =$

$$\frac{1}{2} \times \overline{-\frac{6x}{a} - 6} \times \overline{-\frac{x^3}{a} - 3x^2 - 3ax - a^2}^{\,-\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{2} \times \frac{\overline{-\frac{3x^2}{a} - 6x - 3a}^{\,2}}{2} \times \overline{-\frac{x^3}{a} - 3x^2 - 3ax - a^2}^{\,-\frac{3}{2}}$$, o sia $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2}$

$$= \frac{-\frac{6x}{a} - 6}{2\sqrt{-\frac{x^3}{a} - 3x^2 - 3ax - a^2}} - 1 \times \frac{\frac{\overline{-\frac{3x^2}{a} - 6x - 3a}^{\,2}}{2}}{2\sqrt{\overline{-\frac{x^3}{a} - 3x^2 - 3ax - a^2}^{\,3}}}$$

che ridotta allo stesso denominatore risulta $\frac{d^2y}{\overline{dx}^2} =$

— 6

$$\frac{\frac{-6x-6a}{a} \times \frac{-x^3-3ax-3a^2x-a^3}{a} - 1 \times \overline{\frac{-3x^2-6ax-3a^2}{2a^2}}^{\,2}}{2\sqrt{-\frac{x^3}{a}-3x^2-3ax-a^2}}$$

Faccio $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, e mi viene $\frac{-6x-6a}{a} \times \frac{-x^3-3ax^2-3a^2x-a^3}{a}$

$- 1 \times \overline{\frac{-3x^2-6ax-3a^2}{2a^2}}^{\,2} = 0$. Con fare le indicate operazioni, e toglie-

re i termini, che ſi elidono, ſi ha finalmente $x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 0$, da cui ſi ricava $x = -a$. Si ſoſtituiſca queſto valore di x nella data equazione $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + ay^2 - 2aby + ab^2 + a^3 = 0$, ed eſſa ſi cangierà in $ay^2 - 2aby + ab^2 = 0$, dalla quale ſi prenda il valore di y, che è $y = b$. Adunque il cercato punto di regreſſo è il punto A, cui corriſponde l'abſciſſa negativa DF $= -a$, e l' ordinata poſitiva FA $= b$

AR-

ARTICOLO VI.

Dei raggi osculatori.

381. Suppongo quì le cose dette ai num. 366., 368. Tomo IV., poste le quali cose osservo, che se da un qualunque punto B [Fig. 59.] della curva AFBC, che nasce dallo sviluppo della curva AGeIE, si condurrà a questa evoluta una qualunque retta BG, che non sia raggio osculatore, sarà la retta BG maggiore dell' arco AG dell'evoluta compreso tra il di lei principio A, e il punto G, ove viene incontrata dalla retta BG; poichè è $BG + Gbe > Be$ raggio osculatore; ma $Be = AGbe$, dunque levando la porzione comune Gbe, resta $BG > AG$.

382. Quindi se da un qualunque punto I preso su l'evoluta concava da una sola parte si condurranno alla curva AFBCD quante rette si vogliono IA, IF, IB, IC, ID ec., esse dal punto A andando verso D si andran facendo continuamente maggiori, cioè $IF > IA$, $IB > IF$, $IC > IB$, $ID > IC$ ec.. Di fatto è $Aa + aI > AI$, ma pur ora si è veduto essere $aF > aA$, dunque essendo $Ia + aA > AI$, molto più sarà $IF > IA$. Si conduca adesso il raggio osculatore Fb, che (pel num. citato 368.) è $= Aab$, e il raggio osculatore Be, con che si ha $FbneI = BeI$; conducendosi poi la retta Bb è $Bb + be > Be$, cioè $> Fb + be$, che è $= Be$: essendo adunque $Bb + be > Fb + be$, se leveremo be da una parte, e dall'altra, resterà $Bb > Fb$, e in conseguenza $Bn > Fn$, e però $BI > Fbn + nI$; ma $Fbn + nI > FI$, dunque molto più $BI > FI$. Istessamente si conduca la tangente, o sia raggio osculatore CI, e si avrà $Be + eI = CI$; ma $Be + eI > BI$, dunque anche $CI > BI$. Nello stesso modo si dimostra, che $ID > CI$ ec.

383. Che però se fatto centro all'estremità D (Fig. 60.) del raggio osculatore DB si descriverà con un'apertura di compasso a lui eguale l'arco qBC, la porzion d'arco Bq cadrà tutta fuori della curva Ba, e l'altra porzion d'arco BC cadrà tutta dentro la curva BH. Che se si prenderà un raggio maggiore di DB, come sarebbe PB, l'arco bBb descritto con questo raggio cadrà intieramente al di fuori dell'arco qBC, che soltanto toccherà in B; ovvero se si prenderà un raggio minore di DB, come QB, l'arco sBr descritto con questo raggio cadrà tutto al di dentro dell'arco qBC: Onde su la retta BDP non è assegnabile alcun punto, dal quale, come centro, si possa descrivere un arco, che passando pel punto B cada tra la curva aBH, e l'arco qBC descritto col raggio osculatore DB. Parimente se su la porzione DR dell'evoluta si prenderà un qualunque punto E, da cui, come centro si descriva l'arco mBn, egli interfecherà nel punto B l'arco qBC descritto col raggio osculatore DB, cadendo tutto al di fuori della porzione qB, e al di dentro della BC; o pure se su la porzione Da dell'evoluta si prenderà un qualunque punto G, dal quale come centro si descriva l'arco ABF, che passa pel punto B, quest'arco interfecherà parimente nel punto B l'arco qBC descritto col raggio osculatore DB, cadendo interamente al di fuori dell'arco qB, e al di dentro dell'arco BC; conseguentemente nemmeno su l'evoluta è assegnabile alcun punto, dal quale, come centro descrivendosi un arco pel punto B, possa egli passare fra la curva aBH, e l'arco qBC descritto col raggio osculatore DB.

384. Ed ecco ciò, che caratterizza il circolo osculatore, che al num. 354. Tomo IV. ho detto dovere aver comuni tre punti colla curva osculata, vale a dire, che egli combacia talmente la curva nel punto osculato, che fra lui, e la curva non può passare alcun altro cerchio, il di cui centro sia assegnabile su l' evoluta, o fuori della medesima.

385. Veniamo adesso al modo di trovar la formola generale esprimente il valore del raggio osculatore per qualsivoglia curva riferita all'asse, al quale perciò le ordinate devono essere perpendicolari. Sia AMR (Fig. 61.) la data curva riferita all' asse AQ. Sia AP una qualunque abscissa $= x$, e PM la corrispondente ordinata $= y$, alla quale sia condotta infinitamente prossima l' altra ordinata pm, onde sarà $Pp = MN = dx$, $Nm = dy$,

$Mm = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{Nm}^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Dai punti M, m si conducano perpendicolari alla curva le rette MC, mC, le quali concorreranno nel punto C, e saranno raggi osculatori della curva, che sono quelli, di cui cercasi l' espressione generale, e che per ora chiamo $= R$. Si prolunghino le due ordinate MP, mp, finchè vadano a incontrare in B, b la retta CB, che dal punto C si conduce parallela all'asse AQ, e si faccia $MB = z$. Posto ciò saranno simili i due triangoli MNm, MBC, mentre sono rettangoli in N, B, ed hanno eguali i due angoli mMN, CMB a motivo, che essendo retti i due angoli mMC, NMB, con levare l'angolo comune NMC, resta l' angolo mMN eguale all' angolo CMB. Ma dalla similitudine de' due triangoli mMN, MCB si ottiene la seguente proporzione MN $(= dx)$: Mm $(= \sqrt{dx^2 + dy^2})$ :: MB $(= z)$: MC $\left(= \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = R\right)$. Da questa espression generale del raggio osculatore devesi eliminare la z, e a tal fine si differenzi la ritrovata equazione $R = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ non ritenendo alcun elemento costante, e ne verrà $dR =$

$$\frac{dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{dxd^2x + dyd^2y \times z \times dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - d^2x \times z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2}$$

che

che mediante la riduzione allo steſſo denominatore diventa $=$

$$\frac{dz \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} + \overline{dx\,d^2x + dy\,d^2y} \times z \times dx - d^2x \times z \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$$

$$= \frac{dz\overline{dx}^3 + dz\,dx\overline{dy}^2 + z\overline{dx}^2\,d^2x + z\,dx\,dy\,d^2y - z\overline{dx}^2\,d^2x - z\overline{dy}^2\,d^2x}{\overline{dx}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$$

$$= \frac{dz\,\overline{dx}^3 + dz\,dx\,\overline{dy}^2 + z\,dx\,dy\,d^2y - z\,\overline{dy}^2\,d^2x}{\overline{dx}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}.$$

Ma perchè tanto CM, che Cm è raggio di uno steſſo circolo, e in conſeguenza non ammettono differenza dunque $d.\,R = o$. Si eguagli adunque a zero il ritrovato valore di dR, e ſi avrà

$$\frac{dz\,\overline{dx}^3 + dz\,dx\,\overline{dy}^2 + z\,dx\,dy\,d^2y - z\,\overline{dy}^2\,d^2x}{\overline{dx}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} = o,$$ vale a dire

$dz\,\overline{dx}^3 + dz\,dx\,\overline{dy}^2 + z\,dx\,dy\,d^2y - z\,\overline{dy}^2\,d^2x = o$, la quale ſi cambia in $dy\,\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^3 + z\,dx\,dy\,d^2y - z\,\overline{dy}^2\,d^2x = o$, a motivo che avendo la ſteſſa differenza tanto y, che z, la qual differenza è N$m = dy$, perciò è $dy = dz$, dalla ſoſtituzione del qual valore è provenuta l'ultima equazione, dalla quale ſi

prenda il valore di z, che è $z = \dfrac{dy\,\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^3}{\overline{dy}^2\,d^2x - dx\,dy\,d^2y} =$

$\dfrac{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$. Si ſoſtituiſca ora queſto valore di z nell' equazione

Digitized by Google

$\frac{z\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx}$, e si avrà MC $=$ R $=$

$$\frac{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx \times \overline{dy\,d^2x - dx\,d^2y}} = \frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2\ \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$$

cercata espressìon generale del valore del raggio osculatore.

386. Poichè [pel num. 114.] devesi prendere un qualche differenziale costante, affinchè le formole acquistino un valore determinato, egli è necessario perciò prender costante nella ritrovata espressione R $= \frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2\ \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$ o dx, o dy, ovvero $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Se si prenderà costante dx, sarà $d^2x = 0$, e la formola diverrà [M] R $= \frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2\ \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{-dx\,d^2y}$. Se si prenderà costante dy, sarà $d^2y = 0$, e la detta formola si cambierà in [Q] R $=$ $\frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2\ \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy\,d^2x}$. Se finalmente si supporrà costante l' elemento $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, che è l' arco M$m$ della curva, andrà a zero il suo differenziale, vale a dire sarà $\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} = 0$, cioè $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, da cui si ricava o $d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx}$, o $d^2y = -\frac{dx\,d^2x}{dy}$. Per lo che se nell'equazione R $=$

$\overline{dx}^2$

Digitized by Google

$\frac{\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dyd^2x-dxd^2y}$ si sostituirà il valore di d^2x, ne verrà $R=$

$$\frac{\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{-\frac{\overline{dy}^2\,d^2y}{dx}-dxd^2y}=\frac{\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{\frac{-\overline{dy}^2\,d^2y-\overline{dx}^2\,d^2y}{dx}}=$$

$$dx\times\frac{\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{\overline{\overline{dy}^2+\overline{dx}^2}\times-d^2y}=\frac{dx\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{-d^2y}.$$ Se poi nell'espressione $R=\frac{\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dyd^2x-dxd^2y}$ si sostituirà il valore di $-d^2y$, che si è trovato essere $\frac{dxd^2x}{dy}$, ne verrà $R=\frac{\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dyd^2x+\frac{\overline{dx}^2\,d^2x}{dy}}=$

$$dy\times\frac{\overline{\overline{dy}^2+\overline{dx}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{\overline{\overline{dy}^2+\overline{dx}^2}\times d^2x}=\frac{dy\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{d^2x}.$$

387. Qualora pertanto si voglia determinare il raggio osculatore di una proposta curva della quale deve esser data l'equazione, si differenzi questa equazione, e si ritrovino i valori di dy, $\overline{dy}^2$, d^2y dati per dx, e $\overline{dx}^2$, o pure i valori di dx, $\overline{dx}^2$ d^2x dati per dy, e $\overline{dy}^2$, che si sostituiscano nell'espression generale del raggio osculatore già ritrovata, lo che fatto svaniranno, o sia spariranno dalla formola tutti i differenziali, e resteranno sole quantità finite, dalle quali resterà determinato il valore del raggio osculatore cercato. Affinchè poi la ritrovata espressione del raggio osculatore serva per un determinato punto della curva, devesi primieramente eliminare la y con sostituirci il suo valore preso dall'equazione data, indi si deve sostituire in luogo di x quel valore, che gli compete rispettivamente al punto proposto.

388.

358. Si debba per esempio ritrovare il valore del raggio osculatore della curva CAB [Fig. 62.], la di cui equazione è $x^3-3ax^2-ay^2=0$. Si differenzi questa equazione, e ne verrà $\overline{3x^2-6ax}\times dx-2aydy=0$, da cui si prenda il valore di dy, che è $dy=\frac{\overline{3x^2-6ax}}{2ay}\times dx$, il di cui quadrato è $\overline{dy}^2=$

$$\frac{\overline{9x^4-36ax^3+36a^2x^2}}{4a^2y^2}\times\overline{dx}^2$$

[A]. Si differenzi di nuovo la ritrovata equazione differenziale $\overline{3x^2-6ax}\times dx-2aydy=0$, e si avrà $\overline{6x-6a}\times\overline{dx}^2-2a\overline{dy}^2-2ayd^2y=0$, da cui si prenda il valore di d^2y, che è $d^2y=$

$$\frac{\overline{6x-6a}\times\overline{dx}^2-2a\overline{dy}^2}{2ay}$$

, ove si sostituisca il valore di $\overline{dy}^2$ preso dall'equazione [A], e fatto ciò si avrà $d^2y=$

$$\frac{\overline{6x-6a}\times\overline{dx}^2-\frac{\overline{18ax^4+72a^2x^3-72a^3x^2}\times\overline{dx}^2}{4a^2y^2}}{2ay}=$$

$$\frac{\overline{12axy^2-12a^2y^2-9x^4+36ax^3-36a^2x^2}}{4a^2y^3}\times\overline{dx}^2$$

[B]. Coll' ajuto dell' equazione data $x^3-3ax^2-ay^2=0$ si elimini adesso la y tanto dall' equazione [A], che da questa equazione [B], con che l' equazione [A] diverrà [D] $\overline{dy}^2=$

$$\frac{9x^4-36ax^3+36a^2x^2}{4ax^3-12a^2x^2}\times\overline{dx}^2=\frac{9x^2-36ax+36a^2}{4ax-12a^2}\times\overline{dx}^2,$$

e l' equazione [B] si cambierà in [E] $d^2y=$

$12x^4$

$$\frac{\overline{12x^4 - 36ax^3 - 12ax^3 + 36a^2x^2 - 9x^4 + 36ax^3 - 36a^2x^2}}{4ax^3 - 12a^2x^2\sqrt{\frac{x^3}{a} - 3x^2}} \times \overline{dx}^2 =$$

$$\frac{\overline{3x^3 - 12ax^3} \times \overline{dx}^2}{4ax^4 - 12a^2x^3\sqrt{\frac{x}{a} - 3}} = \frac{\overline{3x^2 - 12ax} \times \overline{dx}^2}{4ax^2 - 12a^2x\sqrt{\frac{x}{a} - 3}}.$$ Fatto ciò si prenda una

delle ritrovate formole generali del raggio osculatore, per esempio si prenda la formola [M], in cui è stato supposto costante l'elemento dx, e in luogo di $\overline{dy}^2$, e d^2y si sostituiscano i loro pur ora ritrovati valori, lo che ridurrà la formola [M] alla seguente R =

$$\frac{\overline{\overline{dx}^2 + \frac{9x^2 - 36ax + 36a^2}{4ax - 12a^2} \times \overline{dx}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \frac{9x^2 - 36ax + 36a^2}{4ax - 12a^2} \times \overline{dx}^2}}{-dx \times \frac{\overline{3x^2 - 12ax} \times \overline{dx}^2}{4ax^2 - 12a^2x\sqrt{\frac{x}{a} - 3}}} =$$

[con levare dal vincolo $\overline{dx}^2$, e con ridurre allo stesso denominatore la quantità, che è in numeratore]

$$\frac{\overline{dx}^3 \times \frac{9x^2 - 32ax + 24a^2}{4ax - 12a^2}\sqrt{\frac{9x^2 - 3\ ax + 24a^2}{4ax - 12a^2}}}{-\overline{dx}^3 \times \frac{3x^2 - 12ax}{4ax^2 - 12a^2x\sqrt{\frac{x}{a} - 3}}} =$$

(con levare $\overline{dx}^3$, con ridurre sotto al vincolo la quantità, che è in numeratore, e con ridurre a forma più comoda la divisione indicata)

$$\text{(S)}\quad \frac{\overline{4ax^2 - 12a^2x}\sqrt{\frac{x}{a} - 3} \times \sqrt{\overline{9x^2 - 32ax + 24a^2}^3}}{-3x^2 + 12ax\sqrt{\overline{4ax - 12a^2}^3}} = R,$$

che è il cercato valor generale del raggio osculatore per la curva CAB. Qualora poi si voglia prevalere di questo valore per un determinato punto della curva, nient' altro si dovrà fare, che sostituire in luogo di x il valore, che compete all' abscissa corrispondente a quel tal punto. E qui si osservi, che il valore di questo raggio osculatore risulta immaginario per tutti quei punti della curva, ai quali corrispondono abscisse minori di $3a$, poichè in questi casi la quantità $\sqrt{\frac{x}{a} - 3}$ è sempre immaginaria, e di fatto rispetto a queste abscisse la curva è immaginaria, onde immaginario pure deve risultarne il raggio osculatore. Se si vorrà il valore del raggio osculatore pel punto della curva, cui corrisponde $x = 3a$, si sostituisca $3a$ in luogo di x nella formola (S), con che essa diverrà

$$R = \frac{\overline{36a^3 - 36a^3}\sqrt{3-3} \times \sqrt{\overline{81a^2 - 96a^2 + 24a^2}^3}}{-27a^2 + 36a^2\sqrt{\overline{12a^2 - 12a^2}^3}} =$$

$\frac{0 \times 0 \times \sqrt{\overline{9a^2}^3}}{9a^2 \times 0} = \frac{27a^3 \times 0}{9a^2 \times 0} = \frac{0}{0}$. Essendosi pertanto trovato $R = \frac{0}{0}$, lo che nulla lascia sapere del cercato valore, per poterlo determinare bisogna ricorrere al metodo esposto all' Art. X. Cap. I.

389. Che se si vorrà il valore del raggio osculatore, che compete al punto della curva, cui corrisponde $x = 4a$, si sostituisca $4a$ in luogo di x nella formola [S], lo che la cambierà nella seguente R =

$$\frac{\overline{64a^3 - 48a^3}\sqrt{1} \times \sqrt{\overline{144a^2 - 128a^2 + 24a^2}^3}}{-48a^3 + 48a^2\sqrt{\overline{16a^2 - 12a^2}^3}} = \frac{16a^3\sqrt{\overline{40a^2}^3}}{0 \times \sqrt{\overline{4a^2}^3}} =$$

$\frac{16a^3\sqrt{(40a^2)^3}}{0}$. Adunque è infinito il valore del raggio osculatore, che compete a quel punto della curva, la di cui absciſſa è $=4a$, e però (pel num. 356. Tomo IV.) è nulla la curvatura della curva in queſto punto, conſeguentemente (pel num 698. Tomo IV.) la curva ha un fleſſo in queſto punto, che corriſponde all' abſciſſa $x=4a$. Di fatto che la curva abbia un fleſſo al punto F, cui corriſponde l' abſciſſa $x=4a$ ſi può in doppio modo dimoſtrare: Primieramente a norma del num. 698. Tomo IV. con trovare i valori de' raggi oſculatori, che competono ai due punti contigui al punto F, riſpetto ad un de' quali il valore del raggio oſculatore ſarà poſitivo, e riſpetto all' altro ſarà negativo. Prendendo pertanto il valore del raggio oſculatore, che compete al punto di curva corriſpondente all' abſciſſa $x=\frac{7}{2}a$ ſi ha [con ſoſtituire $\frac{7}{2}a$ in luogo di x nella formola (S)] $R=$

$$R=\frac{\overline{49a^3-42a^3\sqrt{\frac{7}{2}-3}}\times\sqrt{\left(\frac{441a^2}{4}-\frac{224a^2}{2}+24a^2\right)^3}}{\overline{-\frac{147}{4}a^2+\frac{84}{2}a^2}\sqrt{\left(\frac{28}{2}a^2-12a^2\right)^3}}=\frac{7a^3\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\left(\frac{89}{4}a^2\right)^3}}{\frac{21}{4}a^2\sqrt{\left(\frac{4}{2}a^2\right)^3}}$$

valor poſitivo. Si prenda adeſſo il valore del raggio oſculatore, che compete al punto di curva corriſpondente all' abſciſſa $x=\frac{9}{2}a$. La formola (S) mediante la ſoſtituzione di $\frac{9}{2}a$ in luogo di x diventa

$$R = \frac{\overline{81a^3 - 54a^3} \sqrt{\frac{9}{2} - 3} \times \sqrt{\frac{729}{4}a^2 - \frac{288}{2}a^2 + 24a^2}^{\,3}}{-\frac{243}{4}a^2 + \frac{108}{2}a^2 \sqrt{\frac{36}{2}a^2 - 12a^2}^{\,3}} =$$

$$\frac{27a^3 \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{249a^2}^{\,3}}{-\frac{27}{4}a^2 \sqrt{\frac{12}{2}a^2}^{\,3}}$$ valor negativo. Poichè adunque il valore del raggio osculatore, che compete al punto di curva corrispondente all' absciffa $x = \frac{7}{2}a$ è positivo, e il valore del raggio osculatore, che compete al punto di curva corrispondente all' absciffa $x = \frac{9}{2}a$ è negativo, resta provato [giusta il cit. num.], che il punto F della curva, che ha per absciffa $x = 4a$, e il di cui raggio osculatore è infinito, è un punto di flesso. Di questa verità si può venire in chiaro in secondo luogo con operare a tenore del metodo esposto nel precedente Art.; e per vederlo prendiamo il valore di d^2y antecedentemente trovato, che è $d^2y = \frac{3x^2 - 12ax \times \overline{dx}^2}{4ax^2 - 12a^2x \sqrt{\frac{x}{a} - 3}}$, in cui si sostituisca $4a$ in luogo di x, e ne verrà $d^2y = \frac{\overline{48a^2 - 48a^2} \times \overline{dx}^2}{64a^3 - 48a^3 \sqrt{4 - 3}} = \frac{0}{16a^3} = 0$. Si ha adunque $d^2y = 0$, che è il carattere dei punti di flesso, come si è veduto al citato articolo.

390. Dopo efferfi trovata l' espressione del raggio osculatore, che compete a un dato punto della curva, se ne costruirà il valore giusta la maniera insegnata nel Tomo IV.

391. A norma pertanto del citato numero se il valore del raggio osculatore sarà positivo, ciò sarà segno, che la curva volge la concavità all' asse, verso cui ten-

tende lo ſteſſo raggio; e pel contrario volgerà all' aſſe la conveſſità, ſe riſulterà negativo il valore del raggio, che in allora tende alla parte oppoſta dell' aſſe.

392. Per trovare il raggio oſculatore, che compete a un dato punto di curva, non è neceſſario ricorrere alle formole generali trovate, baſtando ancora trovar ſolamente il valore del Co-raggio BM [Fig. 61.], poichè allora dopo aver condotta normale al propoſto punto M della curva la retta indefinita MC, ſe dall' eſtremità B del Co-raggio ſi alzerà normale al medeſimo la retta BC, eſſa andrà a incontrare in C la retta MC, e in queſto modo reſterà determinata la quantità del raggio CM cercato. Anche la retta BC ſi dice co-raggio. Per diſtinguere uno dall' altro queſti due co-raggi, dirò BM co-raggio primo, e BC co-raggio ſecondo.

393. Ora l' eſpreſſion generale del co-raggio MB ſi è trovata eſſere [al num. 385.] $= \frac{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2}{-dxd^2y + dyd^2x}$, allorchè niun elemento ſi ſuppone coſtante: Che ſe ſi ſupporrà coſtante l' elemento dx, l' eſpreſſione generale del co-raggio ſarà $\frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}{-d^2y}$, che diverrà $\frac{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2}{dyd^2x}$ col ſupporre coſtante l'elemento dy.

Se poi ſi vorrà coſtante l' elemento della curva, che viene eſpreſſo da $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, in tal caſo, come abbiam veduto al num. 386. ſarà $dxd^2x + dyd^2y = 0$, e però $-d^2y = \frac{dxd^2x}{dy}$, ovvero $d^2x = -\frac{dyd^2y}{dx}$, per lo che ſe nella formola $\frac{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2}{-dxd^2y + dyd^2x}$ del co-raggio ſi ſoſtituirà queſto valore di d^2x, ſi avrà $\frac{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2}{-\frac{\overline{dy}^2\,d^2y}{dx} - dxd^2y} = \frac{\overline{dx}^4 + \overline{dx}^2\,\overline{dy}^2}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 \times -d^2y} = \frac{\overline{dx}^2}{-d^2y}$ eſpreſſion generale del co-raggio, in cui è ſuppoſto coſtante l' elemen-

to $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Se poi ſi ſoſtituirà il ritrovato valore di $-d^2y$, la formola $\frac{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2}{-dxd^2y+dyd^2x}$ ſi cambierà in $\frac{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2}{\frac{\overline{dx}^2\, d^2x}{dy} + dyd^2x} =$

$\frac{dy \times \overline{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2}}{\overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \times d^2x} = \frac{dxdy}{d^2x}$ eſpreſſion generale del co-raggio MB, in cui

è ſuppoſto coſtante l'elemento $\sqrt{\overline{dy}^2 + \overline{dx}^2}$.

394. Se ſi vorrà il valore di BC, eſſo ci verrà ſomminiſtrato dai triangoli ſimili MNm, MBC, da'quali ſi ottiene MN $(=dx)$: Nm $(=dy)$: : MB

$\left(= \frac{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2}{-dxd^2y+dyd^2x}\right)$: BC $\left(= \frac{dy \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{-dxd^2y+dyd^2x}\right)$, il quale col ſupporre

coſtante l' elemento dx diventa $\frac{dy \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{-dxd^2y}$, e col ſupporre coſtante

l' elemento dy paſſa ad eſſere $\frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}{d^2x}$. Finalmente col ſupporre coſtante l'elemento $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, ſarà o BC $= \frac{\overline{dy}^2}{d^2x}$, o BC $=$

$\frac{dxdy}{-d^2y}$.

395. Dovendoſi pertanto trovare l'eſpreſſione del co-raggio primo nella curva CAB [Fig. 62.], della quale poco avanti ho determinato il raggio oſculatore, ſi prenda una delle trovate formole generali di queſto co-raggio; per eſempio quella, in cui è ſtato ſuppoſto coſtante l' elemento dx, che è

dx

$\frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}{-d^2y}$, nella quale si sostituiscano i valori di $\overline{dy}^2$, e di d^2y presi dal num.

388., e ne verrà
$$\frac{\overline{dx}^2 + \frac{\overline{9x^4 - 36ax^3 + 36a^2x^2} \times \overline{dx}^2}{4ax^3 - 12a^2x^2}}{\frac{\overline{-3x^2 + 12ax} \times \overline{dx}^2}{\overline{4ax^2 - 12a^2x}\sqrt{\frac{x}{a} - 3}}} =$$

$$\frac{\overline{4ax^2 - 12a^2x}\sqrt{\frac{x}{a} - 3} \times \overline{9x^4 - 32ax^3 + 24a^2x^2}}{\overline{4ax^3 - 12a^2x^2} \times \overline{-3x^2 + 12ax}} =$$

$$\frac{\overline{x^2 - 3ax}\sqrt{\frac{x}{a} - 3} \times \overline{9x^2 - 32ax + 24a^2}}{\overline{x - 3a} \times \overline{-3x^2 + 12ax}},$$ che è il cercato valor generale del co-raggio primo della curva CAB, il quale rispetto per esempio al punto della curva, cui compete l' abscissa $x = \frac{7}{2}a$ diventa

$$\frac{\overline{\frac{49}{4}a^2 - \frac{21}{2}a^2}\sqrt{\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{441}{4}a^2 - \frac{224}{2}a^2 + 24a^2}}{\overline{\frac{7}{2}a - 3a} \times \overline{-\frac{147}{4}a^2 + \frac{84}{2}a^2}} =$$

$$\frac{\frac{7}{4}a^2\sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{89}{4}a^2}{\frac{1}{2}a \times \frac{21}{4}a^2} = \frac{623a\sqrt{\frac{1}{2}}}{42}.$$ Parimente per avere l' espressione del co-raggio secondo di questa curva, si prenda una delle formole generali, per esempio quella, in cui è stato preso costante l' elemento dx, che è

$\dfrac{dy \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{-dxd^2y}$, ove si sostituiscano i valori di dy, di $\overline{dy}^2$, e di d^2y presi dal num. 388, e fatto ciò questa formola si cambierà in

$$\frac{\dfrac{\overline{3x^2 - 6ax}}{2ax\sqrt{\dfrac{x}{a} - 3}} \times dx \times \overline{\overline{dx}^2 + \dfrac{\overline{9x^4 - 36ax^3 + 36a^2x^2}}{4ax^3 - 12a^2x^2} \times \overline{dx}^2}}{-dx \times \dfrac{\overline{3x^2 - 12ax} \times \overline{dx}^2}{4ax^2 - 12a^2x\sqrt{\dfrac{x}{a} - 3}}} =$$

$$\frac{\overline{3x^2 - 6ax} \times \overline{4\,x^2 - 12a^2x} \times \overline{9x^4 - 32ax^3 + 24a^2x^2}}{2ax \times \overline{-3x^2 + 12ax} \times \overline{4ax^3 - 12a^2x^2}} =$$

$\dfrac{\overline{x - 2a} \times \overline{9x^2 - 32ax + 24a^2}}{2a \times \overline{-x + 4a}}$. Che se questo co-raggio secondo si vorrà pel punto della curva, cui compete l'abscissa $x = \frac{7}{2}a$, vi si sostituisca questo valore di x, e si avrà $\dfrac{\overline{\frac{7}{2}a - 2a} \times \overline{\frac{441}{4}a^2 - \frac{224}{2}a^2 + 24a^2}}{2a \times \overline{-\frac{7}{2}a + 4a}} =$

$\dfrac{\frac{3}{2}a \times \dfrac{\overline{441a^2 - 448a^2 - 96a^2}}{4}}{2a \times \frac{1}{2}a} = \dfrac{\frac{3}{2}a \times \frac{89}{4}a^2}{a^2} = \frac{267}{8}a$ valore cercato del co-raggio secondo.

396.

396. D'egual maniera si opera per trovare il valore del raggio osculatore nelle curve trascendenti riferite all'asse. Vediamolo nella cicloide AME [Fig.63.], in cui è $AB = x$, $BM = y$, $AD = 2a$, e la di lei equazione è $dy =$

$\frac{dx\sqrt{2a-x}}{\sqrt{x}}$, che differenziata ritenendo dx costante diventa $d^2y =$

$$\frac{-\frac{\overline{dx}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{2a-x}} - \frac{\overline{dx}^2\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{-4a\,\overline{dx}^2}{4x\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}.$$

Si prenda la formola generale del raggio osculatore, in cui è stato supposto costante l'elemento dx, che è

$$\frac{\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{-dx\,d^2y}$$, e vi si sostituiscano i valori di d^2y, e

di $\overline{dy}^2$, che è $=\frac{\overline{dx}^2\times\overline{2a-x}}{x}$, con che si avrà

$$\frac{\overline{\overline{dx}^2+\frac{\overline{dx}^2\times\overline{2a-x}}{x}}\sqrt{\overline{dx}^2+\frac{\overline{dx}^2\times\overline{2a-x}}{x}}}{\frac{4a\,\overline{dx}^3}{4x\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}}$$, che con fare la

riduzione allo stesso denominatore, con eseguire la divisione indicata, e con togliere i termini, che si elidono, si riduce alla seguente forma

$$\frac{\overline{4x\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}\times\frac{2a}{x}\sqrt{\frac{2a}{x}}}{4a} = 2\sqrt{4a^2-2ax}$$ espression generale del raggio

osculatore della cicloide. Se si volesse il raggio osculatore, che compete al punto

M,

M, cui corrifponde l'abfciffa AB $= \frac{2}{9}a$, fi dovrebbe foftituire $\frac{2}{9}a$ in luogo di x nell' efpreffione trovata $2\sqrt{4a^2 - 2ax}$, con che effa diventa

$$2\sqrt{4a^2 - \frac{4}{9}a^2} = 2\sqrt{\frac{36a^2 - 4a^2}{9}} = \frac{8}{3}a\sqrt{2},$$ che è il valore del raggio ofculatore CM. Se fi vorrà il valore del co-raggio RM, bafterà foftituire nella di lui formola generale $\frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}{-d^2y}$ i ritrovati valori di $\overline{dy}^2$, e di d^2y, la qual foftituzione la cambierà nella feguente

$$\frac{\overline{dx}^2 + \frac{\overline{dx}^2 \times \overline{2a - x}}{x}}{\frac{4a\,\overline{dx}^2}{4x\sqrt{x}\sqrt{2a - x}}} = \frac{2a \times 4x\sqrt{x}\sqrt{2a - x}}{4ax} = 2\sqrt{2ax - x^2},$$ che relativamente al punto M, rifpetto al quale è $x = \frac{2}{9}a$, diventa

$$2\sqrt{\frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{81}a^2} = 2\sqrt{\frac{36}{81}a^2 - \frac{4}{81}a^2} = \frac{8}{9}a\sqrt{2} = \text{RM}.$$

397. Ho fin'ora fuppofto, che le curve, per le quali vuolfi trovare l' efpreffion generale del raggio ofculatore, fiano riferite all' affe, vale a dire abbiano le ordinate perpendicolari alle abfciffe; ma fe faranno riferite a un diametro, non potran già fervire le formole trovate. Sarà però facile ridurre le formole fuddette fervibili anche per le curve, le di cui ordinate fanno un qualunque angolo colle abfciffe. Sia per efempio la curva AMF (Fig. 64.) rifpetto alla quale è AQ l'affe delle abfciffe, ed AE quello delle ordinate, che coll' affe delle abfciffe fa l' angolo EAQ. Si conduca una qualunque ordinata BM $= u$, la di cui corrifpondente abfciffa è AB $= z$, indi dallo fteffo punto M fi abbaffi perpendicolare all' affe AQ la retta Ma, e fi dica $= \mu$ l' angolo aBM. Prendendo il raggio $= 1$ fi avrà $1 : \text{Sen.}\,\mu :: \text{MB}\ (= u) : a\text{M} = u\ \text{Sen.}\,\mu$; ed $1 : \text{Cof.}\,\mu :: \text{MB}\ (= u) : \text{B}a = u$

$= u$ Cof. μ; dunque $Aa = AB - aB = z - u$ Cof. μ. Quindi per poterfi prevalere delle ritrovate formole nel cafo, che le coordinate non fiano fra loro perpendicolari, niente altro devefi fare, che foftituire nelle medefime $z - u$ Cof. μ in luogo di x, ed u Sen. μ in vece di y; onde perchè l' angolo $aBM = \mu$ è coftante, fi ha $dx = dz - du$ Cof. μ; $d^2x = d^2z - d^2u$ Cof. μ, $dy = du$ Sen μ; $d^2y = d^2u$ Sen. μ. Che però facendofi quefte foftituzioni nella formola generale

$$\frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$$ del raggio ofculatore trovata al n. 385.;

in cui niun elemento è fuppofto coftante, effa fi cambia nella feguente

$$R = \frac{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2\,\overline{\text{Cof}\,\mu}^2 + \overline{du}^2\,\overline{\text{Sen}\,\mu}^2 \sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2\,\overline{\text{Cof}\,\mu}^2 + \overline{du}^2\,\overline{\text{Sen}\,\mu}^2}}{du\,\text{Sen.}\,\mu \times \overline{d^2z - d^2u\,\text{Cof.}\,\mu} - \overline{dz + du\,\text{Cof}\,\mu} \times d^2u\,\text{Sen}\,\mu}$$

Ma $\overline{\text{Cof}\,\mu}^2 + \overline{\text{Sen}\,\mu}^2 = 1$, perchè fi è fatto il raggio $= 1$, e il denominatore è $du\,d^2z$ Sen. $\mu - du\,d^2u$ Cof. μ Sen. $\mu - dz\,d^2u$ Sen. $\mu + du\,d^2u$ Cof. μ Sen. μ

$=$ Sen. $\mu \times \overline{du\,d^2z - dz\,d^2u}$, perciò il ritrovato valore di R diventa

$$(A)\quad R = \frac{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2 \sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\,\mu \times \overline{du\,d^2z - dz\,d^2u}}$$

che è la formola generale del raggio ofculatore per quelle curve, le di cui coordinate non fono normali, ma fanno un angolo qualunque $= \mu$.

398. Se fi vorrà coftante l' elemento dz, la formola fi ridurrà alla feguente

$$R = \frac{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2 \sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{-\,\text{Sen.}\,\mu \times dz\,d^2u}.$$

Se fi vorrà coftante l'elemento du, effa diverrà

R $=$

$$R = \frac{\overline{dz}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2\ \sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\ \mu \times dud^2z}\ .$$

Se poi si torrà costante l'elemento della curva, cioè l'archetto Mm, che è

$= \sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2}$, sarà eguale a zero il differenziale di questa quantità, cioè (già Cos. μ è quantità costante)

$$\frac{dzd^2z - d^2zdu\ \text{Cos.}\ \mu - dzd^2u\ \text{Cos.}\ \mu + dud^2u}{\sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2}} = 0,$$ vale a dire

$dzd^2z - d^2zdu\ \text{Cos.}\ \mu - dzd^2u\ \text{Cos.}\ \mu + dud^2u = 0$, da cui si ricava d^2z

$= \frac{-dz\ \text{Cos.}\ \mu + du}{-dz + du\ \text{Cos.}\ \mu} \times d^2u$; e $d^2u = \frac{-dz + du\ \text{Cos.}\ \mu}{-dz\ \text{Cos.}\ \mu + du} \times d^2z$. Mediante la

sostituzione di questo valore di d^2z la formola (A) passa ad essere

$$R = \frac{\overline{dz}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2\ \sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\ \mu \times \frac{-dudz\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2}{-dz + du\ \text{Cos.}\ \mu} \times d^2u - dzd^2u} =$$

$$\frac{\overline{-dz + du\ \text{Cos.}\ \mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2}\ \sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\ \mu \times d^2u \times \overline{dx}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2}$$

$$= \frac{dz - du\ \text{Cos.}\ \mu\ \sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\ \text{Cos.}\ \mu + \overline{du}^2}}{-\text{Sen.}\ \mu \times d^2u} \quad (B)$$

O pu-

O pure foſtituendo il valore di d^2u, la formola (A) ſi trova eſſere

$$R = \frac{\overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}\sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\,\mu \times dud^2z + \dfrac{\overline{dz}^2 - dzdu\,\text{Cof.}\,\mu}{-dz\,\text{Cof.}\,\mu + du} \times d^2z} =$$

$$\frac{\overline{-dz\,\text{Cof}\,\mu + du} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}\sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\,\mu \times d^2z \times \overline{\overline{du}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{dz}^2}}$$

$$= \frac{\overline{-dz\,\text{Cof.}\,\mu + du}\sqrt{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\,\mu \times d\,z} \quad (C),$$

e queſte due formole (B), (C) riſultano dalla ſuppoſizione dell' elemento Mm coſtante.

399. Quanto al valore del co-raggio primo MG, ſi foſtituiſcano nella di lui formola $\frac{dx \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dyd^2x - dxd^2y}$ ritrovata al num. 385. i valori di dx, di dy, di $\overline{dx}^2$, di $\overline{dy}^2$, di d^2x, e di d^2y trovati al num. 397., con che eſſa ſi cambierà nella ſeguente

$$\frac{\overline{dz - du\,\text{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{du\,\text{Sen.}\,\mu \times \overline{d^2z - d^2u\,\text{Cof}\,\mu} - \overline{dz + du\,\text{Cof.}\,\mu} \times d^2u\,\text{Sen}\,\mu}$$

$$= \frac{\overline{dz - du\,\text{Cof}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\,\mu \times \overline{dud^2z - dzd^2u}},$$

che con fare coſtante l' elemento dz diventa

$$\frac{\overline{dz - du\,\mathrm{Cof.}\,\mu \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}}{-\,\mathrm{Sen.}\,\mu \times dzd^2u}.$$

Con far coftante l' elemento du paffa ad effere

$$\frac{\overline{dz - du\,\mathrm{Cof.}\,\mu \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}}{\mathrm{Sen.}\,\mu \times dud^2z};$$

e finalmente con far coftante l' elemento Mm della curva fi riduce alle due feguenti formole

$$\frac{\overline{dz - du\,\mathrm{Cof.}\,\mu \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}}{\mathrm{Sen.}\,\mu \times \frac{-\,dudz\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}{-\,dz + du\,\mathrm{Cof.}\,\mu} \times d^2u - dzd^2u} =$$

$$\frac{\overline{dz - du\,\mathrm{Cof.}\,\mu}^2}{-\,\mathrm{Sen.}\,\mu \times d^2u}\;;\;\mathrm{e}\;\frac{\overline{dz - du\,\mathrm{Cof.}\,\mu \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}^2}{\mathrm{Sen.}\,\mu \times dud^2z + \frac{\overline{dz}^2 - dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu}{-\,dz\,\mathrm{Cof.}\,\mu + du} \times d^2z} =$$

$$\frac{\overline{-\,dz\,\mathrm{Cof.}\,\mu + du} \times \overline{dz - du\,\mathrm{Cof.}\,\mu}}{\mathrm{Sen.}\,\mu \times d^2z}.$$

400. Le fteffe operazioni fi facciano rifpetto al co-raggio fecondo GC. Facendo le accennate foftituzioni di dx, di dy, di $\overline{dx}^2$, di $\overline{dy}^2$, di d^2x, e di d^2y nella di lui formola $\frac{dy \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{-\,dxd^2y + dyd^2x}$ trovata al num. 394., ne verrà

du

$$\frac{du\,\text{Sen.}\,\mu \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{-dz + du\,\text{Cof}\,\mu} \times d^2u\,\text{Sen.}\,\mu + du\,\text{Sen.}\,\mu \times \overline{d^2z - d^2u\,\text{Cof.}\,\mu}} =$$

$\dfrac{du \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{-dzd^2u + dud^2z}$, che con far costante l'elemento dz diventa $\dfrac{du \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{-dzd^2u}$; con far costante l'elemento du si cambia in $\dfrac{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}{d^2z}$; e finalmente con suppor costante l'elemento M*m* della curva acquista le seguenti due forme

$$\frac{du \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{-dzd^2u - \dfrac{dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}{-dz + du\,\text{Cof.}\,\mu} \times d^2u} = \frac{du \times \overline{dz - du\,\text{Cof.}\,\mu}}{d^2u}\text{; e}$$

$$\frac{du \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\dfrac{\overline{dz}^2 - dzdu\,\text{Cof.}\,\mu}{-dz\,\text{Cof.}\,\mu + du} \times d^2z + dud^2z} = \frac{du \times \overline{-dz\,\text{Cof.}\,\mu + du}}{d^2z}.$$

401. Qualora poi si volesse il valore delle rette MP, PC, si troverà primieramente il valore di MP mediante la seguente proporzione Sen. μ : 1 :: MG

$$\left(= \frac{\overline{dz - du\,\text{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\,\mu \times \overline{dud^2z - dzd^2u}}\right) : \text{MP} =$$

$\dfrac{\overline{dz - du\,\text{Cof}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\text{Sen.}\,\mu}^2 \times \overline{dud^2z - dzd^2u}}$, che con far costante

l'ele-

l'elemento dz diventa $\frac{\overline{dz - du\,\text{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\text{Sen.}\,\mu}^2 \times -dzd^2u}$;

con far costante l'elemento du passa ad essere

$\frac{\overline{dz - du\,\text{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\text{Sen.}\,\mu}^2 \times dud^2z}$; e con far costante l'

elemento Mm della curva acquista le due seguenti forme

$$\frac{\overline{dz - du\,\text{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\text{Sen.}\,\mu}^2 \times \frac{-dzdu\,\text{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}{-dz + du\,\text{Cof.}\,\mu} \times d^2u - dzd^2u} = \frac{\overline{dz - du\,\text{Cof.}\,\mu}^2}{-\overline{\text{Sen.}\,\mu} \times d^2u}, \text{ e}$$

$$\frac{\overline{dz - du\,\text{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\text{Sen.}\,\mu}^2 \times dud^2z + \frac{\overline{dz}^2 - dzdu\,\text{Cof.}\,\mu}{-dz\,\text{Cof}\,\mu + du} \times d^2z} =$$

$$\frac{\overline{dz - du\,\text{Cof.}\,\mu} \times \overline{-dz\,\text{Cof.}\,\mu + du}}{\overline{\text{Sen.}\,\mu}^2 \times d^2z}.$$

Dipoi si troverà il valore di PC facendo in primo luogo Sen. μ : Cof. μ : : MG

$\left(= \frac{\overline{dz - du\,\text{Cof}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\text{Sen.}\,\mu \times \overline{dud^2z - dzd^2u}}\right)$: GP =

$\frac{\text{Cof}\,\mu \times \overline{dz - du\,\text{Cof}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\text{Sen.}\,\mu}^2 \times \overline{dud^2z - dzd^2u}}$, ritrovato il qual valore di

GP,

GP, si ha GC—GP=PC, cioè in termini analitici $\frac{du \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{-dzd^2u + dud^2z}$

$$-\frac{(\overline{\mathrm{Cof.}\,\mu} \times \overline{dz - du\,\mathrm{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\mathrm{Sen.}\,\mu}^2 \times \overline{dud^2z - dzd^2u}} =$$

$$\frac{du \times \overline{\overline{\mathrm{Sen.}\,\mu}^2 - dz\,\mathrm{Cof.}\,\mu + du\,\overline{\mathrm{Cof.}\,\mu}^2} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\mathrm{Sen.}\,\mu}^2 \times \overline{dud^2z - dzd^2u}} =$$

(con sostituire 1 in luogo di $\overline{\mathrm{Sen.}\,\mu}^2 + \overline{\mathrm{Cof.}\,\mu}^2$)

$\frac{\overline{du - dz\,\mathrm{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\mathrm{Sen.}\,\mu}^2 \times \overline{dud^2z - dzd^2u}}$, che con far costante dz diventa

$\frac{\overline{du - dz\,\mathrm{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\mathrm{Sen.}\,\mu}^2 \times -dzd^2u}$; con far costante du si cambia in

$\frac{\overline{du - dz\,\mathrm{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\mathrm{Sen.}\,\mu}^2 \times dud^2z}$; finalmente con far costante l' elemento Mm della curva acquista le due seguenti forme

$$\frac{\overline{du - dz\,\mathrm{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}}{\mathrm{Sen.}\,\mu \times \frac{-dzdu\,\mathrm{Cof.}\,\mu + \overline{du}^2}{-dz + du\,\mathrm{Cof.}\,\mu} \times d^2u - dzd^2u} = \frac{\overline{du - dz\,\mathrm{Cof.}\,\mu} \times \overline{-dz + du\,\mathrm{Cof.}\,\mu}}{\overline{\mathrm{Sen.}\,\mu}^2 \times d^2u}; \text{ e}$$

du

$$\frac{\overline{du - dz\,\text{Cof.}\,\mu} \times \overline{\overline{dz}^2 - 2dzdu\,\text{Cof}\,\mu + \overline{du}^2}}{\overline{\text{Sen.}\,\mu}^2 \times dud^2z + \dfrac{\overline{\overline{dz}^2 - dzdu\,\text{Cof}\,\mu}}{-dz\,\text{Cof}\,\mu + du} \times d^2z} = \frac{\overline{du - dz\,\text{Cof.}\,\mu}^2}{\overline{\text{Sen.}\,\mu}^2 \times d^2z}.$$

402. Dopo aver trovate le formole generali de' raggi ofculatori per le curve riferite all'affe, o a un diametro, cerchiamo ancora le formole de' raggi ofculatori per le curve riferite al foco. Sia una qualunque curva AMF (Fig 65.), le di cui ordinate BM $= y$ partono dal punto B. Infinitamente proffima all'ordinata BM fi intenda condotta l'altra Bm. Fatto centro in B col raggio BM fia defcritto l'archetto infinitefimo MN, farà MN $= dx$, Nm $= dy$, e perchè il triangoletto MNm è rettangolo in N, farà Mm $= \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{Nm}^2} = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Dai punti M, m fi alzino perpendicolari alla curva le rette MC, mC, che vadano a incontrarfi nel punto C, che faranno raggi ofculatori della curva, e che denomino colla lettera R, il di cui valore devefi ora trovare. Dal punto B fi conduca la retta Bg perpendicolare al raggio Cm, e la retta BE perpendicolare al raggio CM: Finalmente dal punto G, ove la retta Bg incontra il raggio CM fi tiri la retta GQ parallela al raggio Cm. Fatto ciò fi trovano primieramente fimili i due triangoli BME, MNm, poichè fono rettangoli in E, N, e l'angolo BME è eguale all'angolo mMN, avvegna che effendo retti i due angoli mMC, BMN, fe fi leverà l'angolo comune NMC, refterà l'angolo mMN eguale all'angolo BME. Ora i due triangoli fimili MNm, MEB fomminiftrano la feguente proporzione Mm $\left(= \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\right)$: Nm $(= dy)$: : BM $(= y)$: BE $= \dfrac{ydy}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$. Siccome poi l'archetto Mm è infinitefimo, e però i due raggi CM, Cm fono infinitamente proffimi, perciò farà Gg la differenza di BE; onde per avere il valore di Gg bafta differenziare il ritrovato valore di BE $= \dfrac{ydy}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$. Si differenzi adunque quefta quantità non ritenendo alcun elemento coftante, e ne verrà

$$\frac{\overline{dy}^2 + yd^2y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} - \dfrac{\overline{dxd^2x - dyd^2y} \times ydy}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} =$$

[mediante la riduzione allo fteffo denominatore]

$\overline{du}^2$.

$$\frac{\overline{\overline{dy}^2 + y\,d^2 y} \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \; \overline{-dxd^2x - dyd^2y} \times ydy}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} =$$

[con fare le opportune moltiplicazioni, e togliere i termini, che si elidono]

$$\frac{\overline{dx}^2\;\overline{dy}^2 + y\,\overline{dx}^2\,d^2y + \overline{dy}^4 - ydydxd^2x}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} = Gg = Qm.$$ Se pertanto si

determinerà adesso il valore di MQ, si potrà poscia prevalere de' due triangoli simili MCm, MGQ per ritrovare la formola generale esibente il valore del raggio osculatore CM. Quanto al valore di MQ egli si trova essere

$$= Mm - Qm = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} - \frac{\overline{dx}^2\;\overline{dy}^2 - y\,\overline{dx}^2\,d^2y - \overline{dy}^4 + ydydxd^2x}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$$

$=$ (mediante la riduzione allo stesso denominatore)

$$\frac{\overline{dx}^4 + 2\,\overline{dx}^2\;\overline{dy}^2 + \overline{dy}^4 - \overline{dx}^2\;\overline{dy}^2 - y\,\overline{dx}^2\,d^2y - \overline{dy}^4 + ydydxd^2x}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} =$$

$$\frac{\overline{dx}^4 + \overline{dy}^2\;\overline{dx}^2 - y\,\overline{dx}^2\,d^2y + ydydxd^2x}{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} = MQ.$$ Ora avendosi il va-

lore di $Mm = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, di MQ pur ora trovato, e di $MG = ME$

$= \frac{ydx}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$, che ci viene esibito da questa proporzione Mm

$(= \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$: MN $(= dx)$ :: BM $(= y)$: $ME = MG = \frac{ydx}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$,

si troverà il valore del raggio osculatore CM mediante i due triangoli simili

Digitized by Google

MCm MGQ, che somministrano questa proporzione MQ

$$\left(= \frac{\overline{dx}^4 + \overline{dx}^2\,\overline{dy}^2 - y\,\overline{dx}^2\,d^2y + y\,dy\,dx\,d^2x}{\overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}\right) : \mathrm{MG}\left(= \frac{y\,dx}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}\right) ::$$

$$\mathrm{M}m \left[= \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\right] : m\mathrm{C} = \mathrm{MC} = \mathrm{R}$$

$$= \frac{\dfrac{y\,dx\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}}{\dfrac{\overline{dx}^4 + \overline{dx}^2\,\overline{dy}^2 - y\,\overline{dx}^2\,d^2y + y\,dy\,dx\,d^2x}{\overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}} =$$

$$\frac{y\,dx \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^4 + \overline{dy}^2\,\overline{dx}^2 - y\,\overline{dx}^2\,d^2y + y\,dy\,dx\,d^2x} =$$

$$\frac{\overline{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y + y\,dy\,d^2x} = \mathrm{R},$$ che è la formola generale del raggio osculatore per le curve riferite al foco, in cui niun elemento è supposto costante.

403. Che se si vorrà costante l' elemento dx, la ritrovata formola del raggio osculatore si cambierà nella seguente R $=$

$$\frac{\overline{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y}.$$ Se si supporrà costante l' elemento dy, la formola diverrà $\mathrm{R} = \dfrac{\overline{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 + y\,dy\,d^2x}$. Se finalmente si

vor-

vorrà costante l'elemento $Mm = \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, la formola del raggio osculatore si ridurrà alle due seguenti $R =$

$$\frac{\overline{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y - \frac{y\,\overline{dy}^2\,d^2y}{dx}} =$$

$$\frac{dx \times \overline{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^4 + \overline{dx}^2\,\overline{dy}^2 - y\,\overline{dx}^2\,d^2y - y\,\overline{dy}^2\,d^2y} =$$

$$\frac{y\,dx\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2 - y\,d^2y}\text{; ed } R = \frac{\overline{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 + \frac{y\,\overline{dx}^2\,d^2x}{dy} + y\,dy\,d^2x} =$$

$$\frac{dy \times \overline{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dy\,\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^3 + y\,\overline{dx}^2\,d^2x + y\,\overline{dy}^2\,d^2x} = \frac{y\,dy\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx\,dy + y\,d^2x}.$$

Se in ciascuna di queste quattro formole si supporrà la y infinita, spariranno tutti quei termini, ne' quali essa non entra, e le formole risulteranno le stesse delle ritrovate per le curve riferite all' asse, lo che deve appunto succedere, poichè se la y è infinita, il foco B sarà a una distanza infinita dalla curva, e in conseguenza le ordinate saranno parallele.

404. Per servirci nel caso particolare delle ritrovate formole a trovare il raggio osculatore di una proposta curva, della quale deve esser data l' equazione, si differenzi replicatamente questa equazione, e si prendano i valori di dy, $\overline{dy}^2$, d^2y dati per dx, $\overline{dx}^2$, d^2x; o pure si prendano i valori di dx, $\overline{dx}^2$, d^2x dati per dy, $\overline{dy}^2$, d^2y, e si faccia la sostituzione degli accennati valori in qual più piace delle formole generali del raggio osculatore, nel qual modo spariranno dalla formola le quantità differenziali, e il valore del raggio osculatore si troverà dato per y, e quantità costanti. Vediamo la maniera, con cui devesi operare nel seguente esempio.

405. Debbasi ritrovare il valore del raggio osculatore della spirale iperbolica di primo grado, la di cui equazione è $dx = \frac{p\,dy}{y}$, da cui si ricava $\overline{dx}^2 =$

$\frac{p^2 \overline{dy}^2}{y^2}$. Si differenzi la data equazione ritenendo dx costante, e ne verrà

$0 = p y d^2 y - p \overline{dy}^2$, onde $d^2 y = \frac{\overline{dy}^2}{y}$. Si prenda ora una delle ritrovate

formole generali del raggio osculatore, per esempio la formola

$\frac{y\,dx \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2 - y\,d^2 y}$, in cui è supposto costante l' elemento $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$,

e in essa si sostituiscano i valori di dx, di $\overline{dx}^2$, e di $d^2 y$, lo che fatto si avrà

$\frac{p\,dy \sqrt{\frac{p^2 \overline{dy}^2}{y^2} + \overline{dy}^2}}{\frac{p^2 \overline{dy}^2}{y^2} - \overline{dy}^2}$, che con fare la riduzione allo stesso denominatore,

e l' opportuna divisione, diventa $\frac{p y \sqrt{p^2 + y^2}}{p^2 - y^2}$, che è il cercato valore del

raggio osculatore della spirale iperbolica.

406. Restano a trovarsi le formole generali de' co-raggi ma, Ca. Per ritrovarle servono i due triangoli CMa, MNm, che sono simili, come costa dalle cose dette, e che somministrano le seguenti proporzioni Mm $(= \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2})$:

$MN\,[=dx] :: CM \left(= \frac{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2 y + y\,dy\,d^2 x}\right) : Ma =$

$\frac{y\,dx \times \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2 y + y\,dy\,d^2 x}$ (P), che è la formola generale del co-raggio

Ma, in cui nessun' elemento è supposto costante. Parimente i suddetti due triangoli

goli simili somministrano questa proporzione $Mm\ (=\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\,)$: $N\,m$

$$(=dy) :: CM\ \left(= \frac{\overline{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2}\ \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y + y\,dy\,d^2x}\right) : Ca =$$

$$\frac{y\,dy \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y + y\,dy\,d^2x}$$ [Q], che è la formola generale del co-raggio Ca, in cui niun elemento è supposto costante.

407. Col far costante l' elemento dx la formola (P) diventa

$$\frac{y\,dx \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y}$$: Col far costante l'elemento dy passa ad essere

$$\frac{y\,dx \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 + y\,dy\,d^2x}.$$ Col far costante l'elemento

$\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ acquista le due seguenti forme $\frac{y\,dy\,dx}{dy\,dx + y\,d^2x}$, e

$$\frac{y\,\overline{dx}^2}{\overline{dx}^2 - y\,d^2y}.$$ Così pure con far costante l' elemento dx la formola [Q] diventa

$$\frac{y\,dy \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y}$$; con far costante l'elemento dy si cambia in

$$\frac{y\,dy \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 + y\,dy\,d^2x}.$$ Finalmente col suppor costante l' elemento

$\sqrt{dx}$

$\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ acquista le due seguenti forme $\frac{y\,\overline{dy}^2}{dxdy + yd^2x}$, e $\frac{ydxdy}{\overline{dx}^2 - yd^2y}$.

408. Rispetto alle varie curvature, e alla loro misura per mezzo delle parabole di diverso genere, si veda quanto ne ho detto all' Art. VIII. Cap. IV. Tomo IV.

409. Dopo aver trovato le espressioni del raggio osculatore, e de' co-raggi, si potrà col loro ajuto passar a trovare l' equazione dell' evoluta. Eccone il modo. Sia AM*m* [Fig. 66.] la curva, che nasce dallo svolgersi la curva C*a*E. BG è l'asse delle abscisse della curva AM*m*, BH quello delle ordinate; e l' origine di queste coordinate è al punto B. Sia BF una qualunque abscissa $= x$, FM la corrispondente ordinata $= y$. Al punto M si conduca il raggio osculatore ME, e dal punto E abbassandosi normale all' ordinata FM la retta ED, saranno MD, DE i co-raggi. Dall' estremità E del raggio osculatore si tiri normale all' asse BG la retta EG, che chiamo $= u$, ed è l' ordinata all' evoluta C*a*E, alla quale ordinata compete l'abscissa BG$= z$. Chiamando $=$ X il co-raggio DM, ed $=$ Z il co raggio DE (X, Z sono date per le coordinate x, y della curva AM*m*), sarà FM$=$FD$+$DM, cioè $y = u +$X, e BG$=$BF$+$FG ($=$DE), vale a dire $z = x +$Z. Si hanno adunque tre equazioni date per x, y, cioè queste due, e l'equazion della curva AM*m*, e in oltre queste due rinchiudono ancora le coordinate u, z; che però se mediante queste tre equazioni si elimineranno le variabili x y si arriverà a una equazione, che non conterrà se non le variabili u, z, che sono le coordinate dell' evoluta, e in conseguenza essa sarà la di lei cercata equazione. Questo è il modo di giungere all' equazione dell'evoluta [se pure non lo impedisce la lunghezza, e difficoltà del calcolo], ogniqualvolta la curva è riferita all' asse; come è stato detto ancora al num. 707. Tom. IV.; ma se essa sarà riferita al foco, sarà mestiere usare un po' più d' industria per ottenere la cercata equazione dell' evoluta, la qual pure dovrà essere riferita allo stesso foco della curva. Sia ABC [Fig. 67.] la curva riferita al foco E, e BG sia il raggio osculatore, che intendasi prolungato in F, onde F sia il centro del prossimo raggio osculatore, per lo che sarà GF l'elemento, o sia il minimo arco dell' evoluta KG, che sarà eguale al differenziale del raggio osculatore BG. Suppongo trovati il raggio osculatore GB, e i co-raggi BD, DG dati per y: dall' estremità G del raggio osculatore BG sia condotta al foco E della curva la retta EG, che sarà l' ordinata dell' evoluta, e che chiamo $= u$; che però se fatto centro in E, col raggio EG si descriverà l' arco infinitesimo GH, che vada all' ordinata infinitamente prossima EF, sarà quest' archetto GH l' elemento dell' abscissa, che dico $= dz$, e perchè HF è l' elemento dell' ordinata EG, cioè è $= du$, e il triangoletto GHF è rettangolo in H, sarà l' archetto GF dell' evoluta $= \sqrt{\overline{GH}^2 + \overline{HF}^2} = \sqrt{\overline{dz}^2 + \overline{du}^2}$, la quale espressione è eguale al differenziale del raggio osculatore GB dato per y. Il co-raggio DB dato per y si ponga $=$ X, e il co-raggio DG si dica $=$ Z Sarà D

$ED = EB - BD = y - X$. Onde perchè il triangolo GDE è rettangolo in D, si ha $EG = \sqrt{\overline{DG}^2 + \overline{ED}^2}$, vale a dire $u = \sqrt{\overline{y - X}^2 + Z^2}$. Quindi si hanno due equazioni, per mezzo delle quali si può eliminare la y, e in questo modo giungere a una equazione data per u, e dz, che sarà la cercata equazione dell' evoluta. Una delle due equazioni è $u = \sqrt{\overline{y - X}^2 + Z^2}$, e l'altra (con fare $= R$ il raggio osculatore trovato) è $d.R = \sqrt{\overline{dz}^2 + \overline{du}^2}$. Si osservi, che dall' espressione $d.R$ devonsi far sparire i differenziali mediante le opportune sostituzioni, che somministrerà il differenziale dell' equazion data.

410. Basterà un solo esempio per vedere in pratica come devesi operare. Si debba ritrovare l'equazione all' evoluta dell' iperbolica equilatera riferita all' asse. Sia pertanto (F) $y^2 - x^2 + a^2 = 0$ l'equazione dell'iperbola KaMQbR (Fig. 68.), che differenziata diventa $ydy - xdx = 0$, da cui si ricava $dy = \frac{xdx}{y}$, e però $\overline{dy}^2 = \frac{x^2\,\overline{dx}^2}{y^2}$. Si differenzi ancora l'equazione $ydy - xdx = 0$ ritenendo costante dx, e ne verrà $\overline{dy}^2 + yd^2y - \overline{dx}^2 = 0$ da cui si ottiene $d^2y = \frac{\overline{dx}^2 - \overline{dy}^2}{y}$. Si prenda adesso dal num. 393. la formola generale del co-raggio primo, in cui è stato preso costante dx, che è $\frac{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}{-d^2y}$, e vi si sostituiscano i ritrovati valori di $\overline{dy}^2$, e di d^2y, lo che fatto si avrà l' espressione del co-raggio primo, che compete all' iperbola equilatera riferita all'asse, la quale espressione trovasi essere

$$\frac{\overline{dx}^2 + \frac{x^2\,\overline{dx}^2}{y^2}}{\frac{-\overline{dx}^2 + \frac{x^2\,\overline{dx}^2}{y^2}}{y}} = \frac{y\sqrt{y^2 + x^2}}{-y^2 + x^2}\ \text{(A)}.$$

Parimente si prenda dal num. 394 la formola generale del co-raggio secondo, in cui è stato preso costante l' elemen-

to

Digitized by Google

to dx, che è $\frac{dy \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{-dxd^2y}$, e vi si sostituiscano i valori di dy, di $\overline{dy}^2$, e di d^2y, con che ne verrà l'espressione del co-raggio secondo, che compete alla stessa iperbola, e che è

$$\frac{\frac{xdx}{y}\times\overline{\overline{dx}^2+\frac{x^2\overline{dx}^2}{y^2}}}{\frac{-dx\times\overline{\overline{dx}^2-\frac{x^2\overline{dx}^2}{y^2}}}{y}} = (B)\ \frac{x\times\overline{y^2+x^2}}{-y^2+x^2}.$$

Ora chiamando u le ordinate, e z le abscisse dell'evoluta, le quali coordinate devonsi prendere su gli stessi assi dell'iperbola, sarà il co-raggio primo $Zm = Zn\ [= YO] + nm$, cioè (perchè $Zn = YO = u$, ed $nm = y$) $\frac{y\times\overline{y^2+x^2}}{-y^2+x^2} = y + u$ (D), come pure sarà il co-raggio secondo ZY $[= nO] + An = AO$, vale a dire [perchè $AO = z$, ed $An = x$] $\frac{x\times\overline{y^2+x^2}}{-y^2+x^2} + x = z$ (E). Si hanno pertanto le tre equazioni [F], [D], [E], colle quali se mediante le formole generali date all' Art. V. Capo III. del Tomo II. si elimineranno le variabili x, y, si giungerà a una equazione data per le variabili u, z, che sarà la cercata equazione all'evoluta dell' iperbola. Per avere più speditamente questa equazione senza l'ajuto delle accennate formole faccio così: Nell'espressione (A) sostituisco i valori di y, e di y^2 presi dall'equazione [F], con che essa risulta $\pm\sqrt{x^2-a^2}\times\frac{\overline{2x^2-a^2}}{a^2}$, onde l' equazione [D] diventa $\pm\sqrt{x^2-a^2}\times\frac{\overline{2x^2-a^2}}{a^2} = \pm\sqrt{x^2-a^2} + u$, che mediandian-

diante la divisione per $\pm\sqrt{x^2 - a^2}$ riduco alla seguente forma (G)

$\frac{2x^2-2a^2}{a^2} = \frac{u}{\pm\sqrt{x^2 - a^2}}$. Isteffamente nell' espressione (B) sostituisco il valore di

y^2 preso dall' equazione [F], e con ciò essa diventa

$\frac{2x^3-a^2x}{a^2}$, conseguentemente l' equazione (E) passa ad essere $\frac{2x^3-a^2x}{a^2} + x = z$,

vale a dire $\frac{2x^3}{a^2} = z$; da cui ricavo $x^3 = \frac{a^2z}{2}$, ed $x = \sqrt[3]{\frac{a^2z}{2}}$. Inalzo al

quadrato l' equazione (G), ed ho $\frac{u^2}{x^2 - a^2} = \frac{4x^4 - 8a^2x^2 + 4a^4}{a^4}$, che libe-

rata dai denominatori diventa $a^4u^2 = 4x^6 - 12a^2x^4 + 12a^4x^2 - 4a^6$, la quale colla sostituzione dei ritrovati valori di x, e di x^3 si cambia in $a^4u^2 = a^4z^2$

$- 6a^4z\sqrt[3]{\frac{a^2z}{2}} + 12a^4\sqrt[3]{\frac{a^4z^2}{4}} - 4a^6$, cioè $u^2 = z^2 - 6z\sqrt[3]{\frac{a^2z}{2}} +$

$12\sqrt[3]{\frac{a^4z^2}{4}} - 4a^2$ cercata equazione all'evoluta dell'iperbola equilatera. Se adunque

cogli assi AV delle abscisse z, e CB delle ordinate u si descriverà la curva dell'

equazione $u^2 = z^2 - 6z\sqrt[3]{\frac{a^2z}{2}} + 12\sqrt[3]{\frac{a^4z^2}{4}} - 4a^2$, ne verrà TDX, che è

l' evoluta dell' iperbola RbQ, ed FEH, che è l' evoluta dell' iperbola KaM.

411. Poichè qualunque curva si può considerare come nata dallo sviluppo di un'altra curva, ben si vede, che questa seconda si può considerare come risultante dallo sviluppo di una terza, questa terza dallo sviluppo di una quarta, e così in poi. In questo modo considerando la genesi delle curve, si scorge, che si può procedere all'infinito: Per esempio la curva ABD (Fig. 69.) si può riguardare come nata dallo svilupparsi la curva EFH, la quale sia prodotta dallo svilupparsi la curva NLK; e che questa si generi dallo sviluppo della SQP ec.

412. Siccome si è trovata la formola generale del raggio osculatore della prima curva ABD, così si possono trovare le formole generali dei raggi osculatori di tutte le altre curve, e trovarle in modo, che in esse entrino soltanto le variabili della prima curva colle loro differenze. Per farlo si osservi, che se alla curva ABD si condurranno i due raggi osculatori FB, GC infinitamente prossimi, nel qual caso sarà FG il differenziale di FB; indi ai due punti F, G si conducano i due raggi osculatori FL, GM, che saranno infinitamente prossimi, ed ML sarà il differenziale di FL; e istessamente ai due punti M, L si conducano i due raggi osculatori LQ, MR, che saranno infinitamente prossimi, e QR sarà il differenziale di LQ, saranno tutti simili fra loro i triangoli BGC, FMG, LRM, poichè primieramente sono rettangoli in B, F, L, e in oltre sono eguali gli angoli BGC, FMG, LRM, poichè dell'angolo MGF è complemento tanto l'angolo BGC, che l'angolo FMG, conseguentemente questi due angoli BGC, FMG sono eguali. Lo stesso discorso si formi su i due angoli FMG, LRM. Ora dalla somiglianza di questi triangoli BGC, FMG, LRM si deducono le formole generali dei raggi osculatori FL, LQ, poichè suppongo già trovata [giusta il num. 385.] la formola generale del raggio osculatore BF della prima curva ABD, che è (supposto costante dx)

$$\frac{\overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{-dx\,d^2y}$$, siccome è cognito il valore dell'archetto BC, che è $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, e di più con differenziare il valore del raggio FB si ha il valore dell'archetto GF, che trovasi essere

$$\frac{-dxd^2y \times 2dyd^2y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} + dyd^2y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2\,\overline{d^2y}^2} +$$

$$\frac{dxd^3y \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \times \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2\,\overline{d^2y}^2}$$ = (con togliere dx dal numeratore e dal denominatore, e ordinare opportunamente i termini)

$$\frac{-3dy\,\overline{d^2y}^2 + d^3y \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \times \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx\,\overline{d^2y}^2}$$. I due trian-

goli

goli BGC, FMG pertanto somministrano BC $[=\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\,]$: BF

$$\left[=\frac{\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{-dxd^2y}\right]::\text{FG}$$

$$\left[=-\frac{\overline{3dy\overline{d^2y}^2+d^3y\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}\times\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dx\overline{d^2y}^2}\right]:\text{FL}=$$

$$\frac{\overline{3dy\overline{d^2y}^2\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}-d^3y\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}^2}\times\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2\,\overline{d^2y}^3},$$

che è il raggio osculatore della seconda curva EFH. Parimente i due triangoli simili BGC, LRM [suppongo già preso il valore di LM, che è il differenziale di FL] esibiscono BC $(=\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2})$: BF

$$\left(=\frac{\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{-dxd^2y}\right)::\text{ML}$$

$$=\frac{\overline{9\overline{dy}^2\,\overline{d^2y}^4+3\overline{d^2y}^4-8dy\overline{d^2y}^2\,d^3y\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}\times\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2\,\overline{d^2y}^4}$$

$$+\frac{\overline{2\overline{d^3y}^2-d^2yd^4y\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}^2}\times\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2\,\overline{d^2y}^4}$$

al quarto LQ, (che è il raggio osculatore della terza curva NMK) =

$$\frac{-9\overline{dy}^2\,\overline{d^2y}^4 \times \overline{dx^2 + dy^2} - 3\,\overline{\overline{d^2y}^4 + 8dy\,\overline{d^2y}^2\,d^3y \times \overline{dx^2 + dy^2}^2} \times \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3\,\overline{d^2y}^3}$$

$$\frac{-3\,\overline{\overline{a^3y}^2 + d^2y\,d^4y \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^3} \times \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3\,\overline{d^2y}^3}.$$

Collo stesso metodo si troveranno le formole generali de' raggi osculatori delle altre susseguenti curve, che dallo sviluppo d'altre vanno successivamente nascendo.

413. D'egual maniera operando si troveranno le formole generali de' raggi osculatori delle curve, che nascono da un continuo successivo sviluppo d'altre curve riferite tutte al foco, come nella Fig. 70., mentre è cognito l'archetto BC $=$

$\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$; pel num. 403. è dato il raggio osculatore BF $=$

$\dfrac{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2 \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - ydxd^2y}$, in cui è supposto dx costante; ed FG

che è il differenziale di questo raggio.

Si differenzj pertanto il valore di BF, e si avrà

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\overline{\overline{dx}^3 + dx\overline{dy}^2 - ydxd^2y} \times \overline{dy\overline{dx}^2 + \overline{dy}^3 + 2ydyd^2y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} + ydyd^2y\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} \\ \overline{+y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2} \times \overline{-dxdyd^2y + ydxd^3y} \times \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\end{array}\right\}}{\overline{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - ydxd^2y}^2},$$

cioè con togliere dx dal numeratore, e dal denominatore, e ordinar meglio i termini

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\overline{\overline{dx}^2+\overline{ay}^2-yd^2y}\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\times dy\sqrt{\overline{ax}^2+\overline{dy}^2}+3ydyd^2y\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\\ \overline{-ydyd^2y+y^2d^3y}\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\times\sqrt{\overline{ax}^2+\overline{dy}^2}\end{array}\right\}}{dx\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2-yd^2y}^{\,2}},$$

e facendo le indicate moltiplicazioni si otterrà

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}^{\,2}\times dy\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}-ydyd^2y\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\times\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}+\\ 3ydyd^2y\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\times\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}-3y^2dy\overline{d^2y}^2\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\\ -ydyd^2y\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\times\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}+y^2d^3y\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\times\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\end{array}\right\}}{dx\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2-yd^2y}^{\,2}},$$

da cui si ricava

$$\frac{\overline{-3y^2dyd^2y+y^2d^3y-ydyd^2y\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}+dy\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}^{\,2}}\times\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{dx\times\overline{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2-yd^2y}^{\,2}}$$

che è il valore di FG.

Ora i due triangoli simili BGC, FMG somministrano questa proporzione BC

$\left(=\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}\right)$: BF

$$\left\{=\frac{\overline{y\,\overline{dx}^2+y\,\overline{dy}^2}\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3+dx\,\overline{dy}^2-ydxd^2y}\right\}::\ \mathrm{FG}$$

(= —

$$\left\{ = - \frac{\overline{3y^2dy\overline{d^2y}^2 + y^3d^3y + y\,yd^2y \times \overline{dx^2 + dy^2} + dy \times \overline{dx^2 + dy^2}^2} \times \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 - y\,d^2y}^2} \right\}$$

al quarto FL $=$

$$\frac{\overline{-3y^3dy\overline{d^2y}^2 \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} + y^3d^3y + y^2d\,d^2y \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^2 + ydy \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^3} \times \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2 \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 - y\,d^2y}^3}$$

che è il raggio osculatore della seconda curva EFH.
Di poi i due triangoli simili BGC, LRM esibiscono questa proporzione BC

$$\left(= \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}\right) : \mathrm{BF} \left(= \frac{\overline{y\,\overline{dx}^2 + y\,\overline{dy}^2}\ \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 + dx\,\overline{dy}^2 - y\,dx\,d^2y} \right) :: \mathrm{ML} =$$

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} \overline{+9y^2\overline{dy}^2\,\overline{d^2y}^4 + 3y^4\overline{d^2y}^4 - 8y^4dy\,\overline{d^2y}^2d^3y + 4y^3\overline{dy}^2\,\overline{d^2y}^3} \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \\ \overline{+3y^4\overline{d^3y}^2 - y\,d^2yd^4y - 5y^3dyd^2yd^3y - 4y^3\overline{d^2y}^3 - 16y^2\overline{dy}^2\,\overline{d^2y}^2} \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^2 \\ \overline{+y^3d^4y + 7y^2dyd^3y + 5y\overline{dy}^2d^2y + y^2\overline{d^2y}^2} \times \overline{\overline{dx}^2 + dy^2}^3 + \overline{dy}^2 \times \overline{\overline{dy}^2 + \overline{dx}^2}^4 \end{array} \right\} \times \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^2 \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 - y\,d^2y}^4}$$

al quarto L Q$=$

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} \overline{9y^2\overline{dy}^2\,\overline{d^2y}^4 \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} + 3y^5\overline{d^2y}^4 - 8y^5dy\,\overline{d^2y}^2d^3y + 4y^4\overline{dy}^2\,\overline{d^2y}^3} \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^2 \\ \overline{+3y^5\overline{d^3y}^2 - y\,d^2yd^4y - 5y^4dyd^2yd^3y - 4y^4\overline{d^2y}^3 - 16y^3\overline{dy}^2\,\overline{d^2y}^2} \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^3 \\ \overline{+y^4d^4y + 7y^3dyd^3y + 5y^2\overline{dy}^2d^2y + y^2\,\overline{d^2y}^2} \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^4 + y\overline{dy}^2 \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}^5 \end{array} \right\} \times \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{\overline{dx}^3 \times \overline{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 - y\,d^2y}^5}$$

414. Collo stesso metodo si troveranno con calcolo sempre più lungo le formole generali de' raggi osculatori delle altre curve, che nascono da nuovi sviluppi, e nei casi particolari si prevalerà di queste formole per trovare i raggi osculatori di ciascuna di loro, come ci siamo serviti al num. 388. della formola generale del raggio osculatore, che compete alla prima curva. (*)

CA-

(*) I. Il Sig. Maupertuis nelle memorie della Reale Accademia delle Scienze all' an. 1727. ha considerato ancora sotto un altro aspetto lo sviluppo delle curve. Fa egli sviluppare la curva tanto dalla parte concava, che dalla parte convessa per modo, che il filo sia sempre perpendicolare all' evoluta, laddove nel metodo comune di sviluppare le curve il filo è sempre tangente dell' evoluta, e nel tempo stesso è perpendicolare alla curva, che nasce dallo sviluppo. Sia la curva ARE [Fig. 71.], lungo la quale siano tesi due fili, uno dalla parte concava, e l' altro dalla parte convessa, e l' uno, e l' altro per maggiore generalità sia più lungo della curva della porzione $AB = AC$, che chiamo $= a$. Da questa parte A si cominci a sviluppare l' uno, e l' altro filo per modo, che resti sempre perpendicolare alla curva AE. Continuando lo sviluppo questi due fili descriveranno colle loro estremità le due curve BKD, CMF. Ciò posto si intende, che la lunghezza de' fili in qualsivoglia punto delle curve nate dallo sviluppo, come sarebbe la lunghezza de' fili RK, RM è eguale all' arco AR già sviluppo della curva ARE più la quantità costante a: Onde se l' arco AR si dirà $= z$, sarà $RK = RM = z + a$.

II. Se si vorranno trovar le equazioni, che danno il rapporto delle coordinate della curva, che si sviluppa alle coordinate delle curve nate dallo sviluppo, della curva ARE le coordinate siano $Am = x$, $mR = y$, e conducendosi l' ordinata nr infinitamente prossima, sarà $mn = Rp = dx$, $pr = dy$. Dal punto M segnato dall' estremità del filo RM si conduca all' asse GH l' ordinata $MT = u$, e parallela allo stesso asse si tiri la retta $Mq = AC + CT - Am =$ (con fare $CT = t$) $a + t - x$, con che sarà $Rq = y - u$. Istessamente rispetto alla curva BKD conducendosi dal punto K all' asse GH l' ordinata $KQ = u$, e parallela allo stesso asse la retta KX, che vada a incontrare in X l' ordinata mR prolungata, con dire $BQ = t$, sarà $KX = BQ + BA + Am = t + a + x$, ed $XR = KQ - mR = u - y$. Ora sono simili i triangoli Rpr, KqM, KRX, dai quali si ottengono le seguenti proporzioni Rp $(= dx)$: pr $[= dy]$: : Rq, ovvero RX $[= \pm y \mp u]$: qM, ovvero KX $[= a + t \mp x]$, cioè (moltiplicando fra loro i termini estremi, e i medj] $\overline{\pm y \mp u} \times dy = \overline{a + t \mp x} \times dx$ (A); ed rp $(= dy)$: Rr $[= dz]$: : Mq, ovvero KX $[= a + t \mp x]$: RM, ovvero RK $[= z + a]$, da cui ne viene (B) $\overline{a + t \mp x} \times dz = \overline{z + a} \times dy$; e queste due equazioni [A], [B] sono le ricercate.

III. Se si vorrà trovare il valore della sottotangente, che compete a un qualunque punto a, ovvero G [Fig. 71.] delle curve BD, mF nate dallo sviluppo, la quale sottotangente cade su la tangente TN dell' evoluta, si conduca al punto N dell' evoluta ANE il raggio osculatore CN secondo il metodo comune, che deve passare pel dato punto a, ovvero G, al quale infinitamente prossimo si tiri l' altro Cn, che siano

CAPO III.

Delle equazioni differenziali.

ARTICOLO I.

Riflessioni generali su le equazioni differenziali.

415. Allorchè si differenziano le equazioni finite nascono le equazioni differenziali, le quali diconsi di primo grado, se le equazioni finite sono state differenziate una sola volta; di secondo grado, se le equazioni finite sono state differenziate due volte; di terzo grado, se la differenziazione è stata replicata tre volte ec.

416.

---

prolungati in G, H *punti della curva* mGF. *Si dica* =R *questo raggio osculatore* CN. *Fatto centro in* C *con gli intervalli* Ca, CG *si descrivano gli archetti* ab, GK. *Egli è evidente, che è* be=Nn=HK. *L'arco* AN *si dica* =z, *onde sarà* Nn=dz; *e perchè* Na=NG=z+a, *sarà* Ca=CN−Na=R−z−a, *e* CG=CN+NG=R+z+a. *Ora per trovare il valore degli archetti* ab, GK *si faccia* CN [=R] : Nn [=dz] : : Ca [=R−z−a] : ab $= \frac{R-z-a}{R} \times dz$; *e* CN [=R] : Nn [=dz] :: CG [=R+z+a] : GK$= \frac{R+z+a}{R} \times dz$. *Ma sono simili i triangoli* bae, NaP, *che somministrano questa proporzione* be [=dz] : ba $(= \frac{R-z-a}{R} \times dz)$: : aN (=z+a) : NP$=$

$$\frac{Rz-z^2-2az+aR-a^2}{R}$$ *valore della sottotangente* NP, *che compete al punto* a.

Istessamente i due triangoli simili GKH, GNT *danno* KH (=dz) : KG $(= \frac{R+z+a}{R} \times dz)$: : GN (=z+a) : NT $= \frac{Rz+z^2+2az+aR+a^2}{R}$ *valore della sottotangente* NT, *che compete al punto* G.

IV.

416. Poichè (pel num. 23.) il differenziale della quantità costante è nullo, siccome per la stessa ragione è nullo il differenziale di un differenziale, che è stato assunto costante, egli è evidente, che mediante la differenziazione si possono far sparire non solo le quantità costanti, che entrano nell' equazione finita, ma eziandio qual più piace delle due variabili. Per far spirare le quantità costanti, dovrassi tante volte replicare la differenziazione, quante sono le costanti, che si voglion levare; e per far sparire una variabile si dovrà ripetere tante volte la differenziazione, quante vengono indicate dall' esponente massimo di tale variabile accresciuto di una unità. Per esempio si debbano far sparire le quantità costanti a, b, e^2, che entrano nell' equazione $x^3 - ay^2 + bxy + ae^2 = o$. Colla prima differenziazione si toglierà il termine costante ae^2 facendo $3x^2dx - 2aydy + bydx + bxdy = o$, che riduco a questa forma a fine di levare la quantità costante b

$\frac{3x^2dx - 2aydy}{ydx + xdy} + b = o$. Differenzio di nuovo questa equazione ritenendo costante

---

IV. *Quindi il valore della tangente* aP *è* $= \sqrt{\left(\frac{Rz - z^2 - 2az + aR - a^2}{R}\right)^2 + \overline{z+a}^2}$.

e il valore della tangente GT *è* $= \sqrt{\left(\frac{Rz + z^2 + 2az + aR + a^2}{R}\right)^2 + \overline{z+a}^2}$.

V. *Che se si vorrà il valore del trapezio* abnN, *esso sarà* $= \frac{\overline{ab + Nn} \times aN}{2}$

$= \frac{\overline{dz + \frac{\overline{R - z - a}}{R} \times dz} \times \overline{z+a}}{2} = \frac{\overline{2Rz - 2az - z^2 + 2aR - a^2}}{2R} \times dz$; *e nello stesso*

modo il valore del trapezio NnKG *è* $\frac{\overline{Nn + GK} \times GN}{2} =$

$\overline{dz + \frac{\overline{R + z + a}}{R} \times dz} \times \overline{z+a} = \frac{\overline{2Rz + 2az + z^2 + 2aR + a^2}}{2R} \times dz$.

l' elemento dx, e mi viene $6xy\,\overline{dx}^3 + 6x^2\,\overline{dx}^2\,dy - 2aydx\,\overline{dy}^2 - 2ax\,\overline{dy}^3 - 2ay^2dxd^2y - 2axydyd^2y - 3x^2\,\overline{dx}^2\,dy + 2aydx\,\overline{dy}^2 - 3x^2\overline{dx}^2\,dy + 2aydx\,\overline{dy}^2 - 3x^3dxd^2y + 2axydyd^2y = 0$, che a motivo di levare la quantità costante a riduco a questa forma $\dfrac{6xy\,\overline{dx}^3 - 3x^3\,dx\,d^2y}{2ydx\,\overline{dy}^2 - 2x\,\overline{dy}^3 - 2y^2dxd^2y} + a = 0$.

La differenzio ritenendo al solito dx costante, con che ritrovo

$$\overline{6y\,\overline{dx}^4 + 6x\,\overline{dx}^3\,dy} \times \overline{2ydx\,\overline{dy}^2 - 2x\,\overline{dy}^3 - 2y^2dxd^2y} - \overline{9x^2\,\overline{dx}^2\,d^2y - 3x^3dx\,d^3y} \times \overline{2ydx\,\overline{dy}^2 - 2x\,\overline{dy}^3 - 2y^2dxd^2y} - \overline{2dx\overline{dy}^3 - 4ydxdyd^2y + 2dx\overline{dy}^3 + 6x\overline{dy}^2d^2y + 4ydxdyd^2y + 2y^2dxd^3y} \times \overline{6xy\overline{dx}^3 - 3x^3dxd^2y}$$

$= 0$ equazione, in cui non ha luogo alcuna delle costanti a, b, e^2, ma che però tutte implicitamente le comprende, anzi comprende tutte le equazioni contenute sotto questa forma $x^3 - ay^2 + bxy + ae^2 = 0$, qualunque siano i valori di a, b, e^2.

417. Che questa equazione differenziale comprenda implicitamente le costanti a, b, e^2 se ne potrà accertare con sostituire in luogo di y, o pur di x il suo valore preso dalla data equazione finita. Per isfuggire la prolissità del calcolo vediamolo in pratica su questa equazione semplicissima $y^2 - ax = 0$, che a fine di fare sparire la quantità costante a riduco a questa forma $\dfrac{y^2}{x} - a = 0$, poscia la differenzio, e mi viene $2xydy - y^2dx = 0$, o sia $2xdy - ydx = 0$: Ma se in luogo di x sostituirò il suo valore $\dfrac{y^2}{a}$ preso dall' equazione proposta, l' equazione differenziale diverrà $\dfrac{2y^2dy}{a} - ydx = 0$, vale a dire $2ydy - adx = 0$, che è la stessa equazione differenziale, che si sarebbe trovata con differenziare l' equazione $y^2 - ax = 0$.

418. Con un' altro esempio vedremo come si possa far sparire qual più piace delle due variabili. Proposta essendo l' equazione $y^3 + ay^2 - by - c = X$ (la lettera X denota una funzione di x) si debba far sparire la y. Si differenzi questa equazione, e si avrà $3y^2dy + 2aydy - bdy = dX$. Si differenzi di nuovo ritenendo dy costante, e ne verrà $6y\,\overline{dy}^2 + 2a\,\overline{dy}^2 = d^2X$. Si differenzi ancora, e ne risulterà

terà $6\,\overline{dy}^3 = d^3X$; e se si differenzierà di nuovo, si avrà per ultimo $o = d^4X$, in cui non entra la variabile y, che per altro, a motivo d' aver preso costante l' elemento dy, devesi considerare, come avente luogo nell' equazione.

419. Da ciò nasce, che da diverse equazioni finite risultano le stesse equazioni differenziali: Così da queste due diverse equazioni finite $x^2y^2 - a^4 = o$, ed $xy - ab = o$ risulta la stessa equazione differenziale $ydx + xdy = o$: Parimente da queste due diverse equazioni finite $xy + ax - bf = o$, $xy - a^2 = o$ dopo avere differenziato due volte ne nasce la medesima equazione differenziale $2dxdy + xd^2y = o$ con ritenere costante l' elemento dx. Di più ancora a una stessa equazione differenziale possono condurre equazioni algebraiche, e trascendenti. Ciò si può osservare in queste due equazioni $x^2 + xy - a^2 = o$, ed $x^2 + xy - a^2 = gb^x$. Si divida l' una, e l' altra per b^x, e si avrà $\dfrac{x^2 + xy - a^2}{b^x} = o$, $\dfrac{x^2 + xy - a^2}{b^x} = g$, indi si differenzino, e ne verrà la stessa equazione differenziale $b^x \times \overline{2xdx + xdy + ydx}$ $- b^x dx \times \overline{x^2 + xy - a^2} = o$, cioè $2xdx + xdy + ydx - x^2dx - xydx + a^2dx = o$ con fare la divisione per b^x; alla quale per altro comune equazione differenziale non era possibile di giungere senza prima preparare nella maniera praticata le due date equazioni.

420. Mediante adunque la differenziazione si possono fare sparire le quantità trascendenti. Oltre l' esempio pur ora veduto, non sarà fuor di proposito produrne alcuni altri. E in primo luogo quanto ai logaritmi, poichè i loro differenziali sono algebraici, egli è evidente, che basta la differenziazione per farli sparire. Sia per esempio l' equazione $y^2 - xl.x + ay = o$, essa si disponga così $\dfrac{y^2 + ay}{x}$ $= l.x$, poscia si differenzi, e si avrà $\dfrac{\overline{2y + a} \times xdy - dx \times \overline{y^2 + ay}}{x^2} = \dfrac{dx}{x}$, vale a dire $\overline{2y + a} \times xdy - dx \times \overline{y^2 + ay} = xdx$, in cui non ha luogo la quantità logaritmica. La quantità proposta dovrassi differenziare due volte, se in essa entreranno due logaritmi: Come data l' equazione $xl.y = yl\,x$, e volendosi un' equazione differenziale, in cui non entrino logaritmi, si dovrà essa differenziare due volte: dalla prima differenziazione, dopo averla ridotta a questa forma $l.y = \dfrac{yl.x}{x}$, si ha $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{xdyl.x + ydx - ydxl\,x}{xx}$, che riduco a questa forma $l.x = \dfrac{x^2dy - y^2dx}{xydy - y^2dx}$, poscia la differenzio, e mi viene (posto dx costante) $\dfrac{dx}{x} =$

Digitized by Google

$$\frac{\overline{2xdxdy+x^2d^2y-2ydxdy} \times \overline{xydy-y^2dx}+\overline{ydxdy-x\overline{dy}^2-xyd^2y} \times \overline{x^2dy-y^2dx}}{\overline{xydy-y^2dx}^2}$$

in cui non entra alcuna quantità logaritmica. Se i logaritmi ſaranno tre, la differenziazione ſi dovrà replicare tre volte ec.

421. Per togliere le quantità eſponenziali, oltre la maniera praticata al preced. num. 419., ſi può ancora operar come ſegue. Sia l'equazione $y = x^z$: ſi paſſi ai logaritmi, e ne verrà $l.\,y = z\,l.\,x$, che ſi differenzi, e ſi avrà $\frac{dy}{y} = dz\,l.x + \frac{zdx}{x}$, che riduco a queſta forma $\frac{xdy-yzdx}{xydz} = l.\,x$, poſcia la differenzio ritenendo dx coſtante, e fatto ciò ritrovo

$$\frac{\overline{dxdy+xd^2y-zdydx-ydzdx} \times \overline{xydz}-\overline{ydxdz-xdydz-xyd^2z} \times \overline{xdy-yzdx}}{\overline{xydz}^2}$$

$= \frac{dx}{x}$ cercata equazione differenziale libera dalle quantità eſponenziali. Se nella propoſta equazione entreranno più quantità eſponenziali, eſſe ſi leveranno colla replicata differenziazione.

422. Parimente colla differenziazione ſi tolgono le quantità tranſcendenti dipendenti dal circolo, del che ſi poſſono vedere gli eſempj ai num. 53., 55., 57., 59. ec.

423. Ed ecco come poſſono variare le equazioni differenziali, che ſi ricavano da equazioni finite. Molto più però poſſono eſſe variare ancora ſecondo che in diverſe maniere ſi poſſono combinare colle equazioni finite mediante la ſomma, la ſottrazione, la moltiplicazione, e la diviſione; o pure ſecondo che ſi deducono da equazioni finite moltiplicate prima, o diviſe per qualſivoglia funzione di x, y.

424. Queſta combinazione dell' equazione differenziale coll' equazione finita ha molti uſi: Primieramente ſerve a far ſparire dall' equazione differenziale le quantità irrazionali: Sia per eſempio l'equazione $y^2 - ay = \sqrt{x^4 + ax^3 - a^2b^2}$, che differenziata diventa $\overline{2y-a} \times dy = \frac{\overline{4x^3+3ax^2} \times dx}{2\sqrt{x^4+ax^3-a^2b^2}}$: Se ſi vorrà liberare queſta equazione differenziale dalla quantità irrazionale $\sqrt{x^4+ax^3-a^2b^2}$, baſterà

rà moltiplicarla per l' equazione finita, e ne verrà $\overline{y^2 - ay} \times \overline{2y - a} \times dy =$

$\frac{\overline{4x^3 + 3ax^2}}{2} \times dx$, o sia $\overline{4y^3 - 6ay^2 + 2a^2y} \times dy = \overline{4x^3 + 3ax^2} \times dx$ cercata equazione differenziale libera dall' irrazionalità. Nello stesso modo levar si possono gli esponenti indeterminati: Come se fosse proposta l' equazione

$x^q = \overline{y^3 + a^2y - b^3}^p$, che differenziata diventa $qx^{q-1}dx =$

$p \times \overline{3y^2 + a^2} \times dy \times \overline{y^3 + a^2y - b^3}^{p-1}$, per liberare questa equazione differenziale dagli esponenti indeterminati basta dividerla per la data equazione finita, con

che ne viene $\frac{qdx}{x} = \frac{p \times \overline{3y^2 + a^2} \times dy}{y^3 + a^2y - b^3}$, vale a dire $\overline{y^3 + a^2y - b^3} \times qdx =$

$px \times \overline{3y^2 + a^2} \times dy$ cercata equazione libera dagli esponenti indeterminati.

425. Serve in secondo luogo a levare le quantità transcendenti: Come essendo data l' equazione $y = g$ Cos. $x + b$ Sen. x, essa si differenzi, e si avrà $dy - gdx$ Sen. $x + bdx$ Cos. x, che si differenzi ancora, e ne verrà $d^2y =$

$-g\overline{dx}^2$ Cos. $x - b\overline{dx}^2$ Sen. x; che però dividendo questa equazione differenziale per l'equazione proposta, si ottiene $\frac{d^2y}{y} = -\overline{dx}^2$, o sia $d^2y = -y\overline{dx}^2$

equazione libera dalle quantità transcendenti.

426. Quindi si scorge, che quantunque un' equazione differenziale sia libera da quantità irrazionali, e transcendenti, può per altro provenire da una equazione finita da quantità irrazionali, e transcendenti affetta; anzi da una stessa equazione finita risultando, può infinite forme vestire secondo le varie maniere, con cui può essere combinata coll' equazione proposta, secondo le diverse quantità, che si vogliono fare sparire, e secondo le varie forme, che si possono dare all' equazione finita prima d' essere differenziata.

ARTI-

ARTICOLO II.

Della maniera di ridurre al primo grado le equazioni differenzio-differenziali, o sia le equazioni differenziali di secondo grado, in cui entrano due sole variabili.

427. NElle equazioni differenzio-differenziali o può aver luogo una sola variabile, o vi si possono ritrovar tutte due. Se nell' equazione differenzio-differenziale da ridursi al primo grado enrrerà una sola variabile, sarà facile passare a tal riduzione mediante una semplice sostiruzione; ma se l' equazione differenzio-differenziale rinchiuderà tutte due le variabili, sarà prima mestiere eliminarne una affine di poter poscia ridurla coll' uso delle sostituzioni al primo grado.

428. Se pertanto l' equazione differenzio-differenziale da ridursi al primo grado comprenderà una sola variabile, si giungerà alla riduzione bramata con sostituire in luogo del differenziale della variabile, che manca, il prodotto dell' altro differenziale in una nuova variabile; lo che facendo, se si assumerà costante questo differenziale, si otterrà eguale a un semplice differenziale il differenzio differenziale della variabile, che manca; onde fatta questa sostituzione verrassi a ridurre al primo grado la proposta equazione differenziale di secondo grado. Applichiamo l' esposta maniera d' operare a un esempio generale: Debbasi ridurre al primo grado l' equazione $A\overline{dx}^{m} + B\overline{dy}^{m} + C\overline{dy}^{m-2}d^2y +$ ec. $= 0$, in cui è preso costante l' elemento dx, e colle lettere A, B, C vengono denotate funzioni di x, onde nella proposta equazione non entra la variabile y. Stante ciò si faccia $dy = udx$; che però sarà $\overline{dy}^{m} = u^m\,\overline{dx}^{m}$; $\overline{dy}^{m-2} = u^{m-2}\,\overline{dx}^{m-2}$; $d^2y = dudx$. Con fare la sostituzione di questi valori la data equazione diventa $A\overline{dx}^{m} + Bu^m\,\overline{dx}^{m} + Cu^{m-2}\,\overline{dx}^{m-1}du = 0$, vale a dire [con fare la divisione per $\overline{dx}^{m-1}$] $Adx + Bu^m dx + Cu^{m-2}du = 0$ cercata equazione differenziale di primo grado, alla quale è stata ridotta la proposta. Può darsi il caso, che mancando nell' equazione la variabile y, sia costanre l' elemento dy, come in questa equazione $A\overline{dy}^{m} + B\,\overline{dx}^{m} + C\,\overline{dx}^{m-2}d^2x +$ ec. $= 0$. Ogniqualvolta ciò accadrà, si dovrà fare $dy = udx$, dalla di cui differenziazione si ha [a motivo di dy costante] $0 = dudx + ud^2x$, da cui si ricava $d^2x = -\frac{dudx}{u}$. Ora nell' equazione data si sostituiscano i valori di $\overline{dy}^{m}$, e di

d^2x

Digitized by Google

d^2x, con che essa diverrà $Au^m\,\overline{dx}^m + B\,\overline{dx}^m - \frac{C\,du\,\overline{dx}^{m-1}}{u} + ec. = o$,

vale a dire $Au^m dx + Bdx - \frac{C\,du}{u} + ec. = o$ cercata equazione differenziale di primo grado.

429. Se nella data equazion generale $A\,\overline{dx}^m + B\,\overline{dy}^m + C\,\overline{dy}^{m-1} d^2y + ec. = o$ mancasse la variabile x, così che le lettere A, B, C rappresentassero funzioni di y. in tal caso bisognerebbe fare $dx = udy$, che differenziata (a motivo di dx costante) diventa $o = dudy + ud^2y$, da cui si ricava $d^2y = -\frac{dudy}{u}$. Ora si sostituiscano nell'equazion data questi valori di dx, e di d^2y, e con ciò essa si cambierà nella seguente $Au^m\,\overline{dy}^m + B\,\overline{dy}^m - \frac{C\,\overline{dy}^{m-1}du}{u} = o$, che moltiplicata per u, e divisa per $\overline{dy}^{m-1}$ diventa $Au^{m+1}dy + Budy - C\,du = o$ cercata equazione di primo grado.

430. Si debba per esempio ridurre al primo grado l'equazione $y^2dxd^2y - \overline{dx}^2\,dy + ydx\,\overline{dy}^2 = y^2dyd^2y$. Si faccia (poichè manca la variabile x) $dx = udy$, che differenziata diventa (a motivo di dx costante) $o = dudy + ud^2y$, da cui si ricava $d^2y = -\frac{dudy}{u}$. Si sostituiscano pertanto questi valori di dx, e di d^2y nell'equazion data, e con ciò essa diverrà $-y^2du\,\overline{dy}^2 - u^2\,\overline{dy}^3 + uy\,\overline{dy}^3 = -\frac{y^2du\,\overline{dy}^2}{u}$, che moltiplicata per u, e divisa per $\overline{dy}^2$ si trova essere $-uy^2du - u^3dy + u^2ydy = -y^2du$ equazione cercata.

431. Fin' ora ho supposto, che l'elemento costante sia dx, o dy, perchè qualunque sia l'assunto elemento costante, si può sempre nella maniera esposta all'Art. VIII. Capo I. passare da uno alla supposizione di un'altro elemento costante. Per altro si può giungere al fine bramato anche senza fare questo passaggio. Si debba

per

per esempio ridurre al primo grado l'equazione $y^3dx\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} + adx\,\overline{dy}^2 = 3ay^2d^2x$, nella quale manca la variabile x, e l' elemento $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ è costante. Si faccia $dx = u\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$, il di cui differenziale è $d^2x = du\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Mediante la sostituzione di questi valori di dx, e di d^2x l' equazione proposta diventa

$4y^3 \times \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + au\,\overline{dy}^2\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} =$

$3ay^2du\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{ay}^2}$, che divisa per $\sqrt{\overline{ax}^2 + \overline{dy}^2}$ è

$uy\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} + au\,\overline{dy}^2 = 3ay^2du$ [A]. Ora dall'equazione $dx = u\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ si prenda il valore di $\overline{dx}^2$, che è $\overline{dx}^2 = \frac{u^2\overline{dy}^2}{1 - u^2}$,

quale si sostituisca nell'equazione (A), e si avrà $uy^3\sqrt{\frac{u^2\overline{dy}^2}{1 - u^2} + \overline{dy}^2} +$

$au\overline{dy}^2 = 3ay^2du$, vale a dire $uy^3dy\sqrt{\frac{1}{1 - u^2}} + au\,\overline{dy}^2 = 3ay^2du$

equazione di primo grado. Parimente essendo data da ridursi al primo grado un' equazione in cui mancando per esempio la variabile x, vi si trovasse soltanto il differenziale di dy, cioè d^2y, e fosse stato assunto costante l' elemento ydx, si dovrebbe fare $dy = uydx$, indi operare al solito ritenendo sempre ydx costante. Così pure se l'elemento costante fosse xdx, si dovrebbe porre $dy = uxdx$.

432. Ma se l' equazione differenzio-differenziale ammetterà tutte due le variabili, dovrassene prima eliminar una nel modo, che or ora dirò, poscia si dovrà operare a norma del precedente num. 428.

433. Ora col mezzo delle sostituzioni si potrà eliminare il più delle volte una delle variabili da una proposta equazione differenzio-differenziale, nella quale entrino tutte due. Per farlo devonsi in luogo delle due variabili dell' equazione introdurre due nuove variabili, ma in modo, che una di queste non entri, che come esponente di una quantità costante, il di cui logaritmo sia $= 1$, mentre la variabile per quante volte si ripeta la differenziazione di simil sorta di quantità non entrando mai, che in luogo di esponente, come costa dai num. 46., 47., 112., se dopo

dopo le debite sostituzioni si potrà fare sparire dall' equazione questa quantità costante, che ha la variabile in esponente, ben si vede, che in tale equazione non enrrerà più; che l'altra variabile, onde per ridurla a equazione differenziale di primo grado niente altro più rimarrà a fare, che prevalersi del merodo del num. 428.

434. Cominciamo da quelle equazioni differenzio-differenziali, che costano di due soli termini, e rale sia l'equazione generale (A) $ax^p \overline{dx}^n = ey^q \overline{dy}^{n-2} d^2y$, in cui si è preso costante l'elemento dx. Si faccia $x = b^{mz}$, $y = b^z u$ (la lettera m rappresenta una quantità per ora indeterminata, e da dererminarsi in seguito secondo il bisogno). Sarà adunque $dx = mb^{mz}dz$, $d^2x = mb^{mz}$ (d^2z $+ m\overline{az}^2$); $dy = b^z \times \overline{du + udz}$; $d^2y = b^z \times \overline{d^2u + 2dzdu + ud^2z + u\overline{dz}^2}$; $x^p = b^{mpz}$; $y^q = b^{qz}u^q$; $\overline{dx}^n = m^n b^{mnz}\overline{dz}^n$; $\overline{dy}^{n-2} =$ $b^{nz-2z} \times \overline{du + uaz}^{n-2}$. E perchè è stato assunto costante l'elemento dx, sarà $= 0$ il ritrovato valore di d^2x, cioè sarà $mb^{mz} \times \overline{d^2z + m\overline{dz}^2} = 0$, da cui si ricava $d^2z = -m\overline{dz}^2$; che però con sostituire $-m\overline{dz}^2$ in luogo di d^2z nel valore di d^2y, esso diventa $d^2y = b^z \times \overline{d^2u + 2dzdu - \overline{m+1} \times u\overline{dz}^2}$. Si facciano pertanto le sostiruzioni di questi valori nell' equazione (A), e con ciò essa si cambierà nella seguente (B) $ab^{mpz} m^n b^{mnz} \overline{dz}^n =$

$$eb^{qz}.\ u^q.\ b^{nz-2z} \times \overline{du + udz}^{n-2}.\ b^z \times \overline{d^2u + 2dzdu - \overline{m+1} \times u\overline{dz}^2}$$

o sia $ab^{mz \times \overline{p+n}}\ m^n\ \overline{dz}^n =$

$$eb^{z \times \overline{q+n-1}} u^q \times \overline{du + udz}^{n-2} \times \overline{d^2u + 2dzdu - \overline{m+1} \times u\overline{dz}^2}\ \text{[D]}.$$

435. Restano ora da togliersi le quantità esponenziali $b^{mz \times \overline{p+n}}$, e $b^{z \times \overline{q+n-1}}$, per il che è stata assunta la quantità indeterminata m. A fine adunque di levarle mediante la divisione, si determini quale esser debba il valore di m, che renda eguali gli esponenti $mz \times \overline{p+n}$, e $z \times \overline{q+n-1}$, e a tale oggetto si faccia $mz \times \overline{p+n} = z \times \overline{q+n-1}$, da cui si ricava

$m = \frac{q+n-1}{p+n}$. Si fostituifca nell'equazione (D) questo valore di m, con che si

ridurrà ad $ab^{c\times\overline{i+n-1}}\left(\frac{q+n-1}{p+n}\right)^{n}\overline{dz}^{n} =$

$eb^{c\times\overline{i+n-1}}u^{q}\times\overline{du+udz}^{n-2}\times\overline{d^2u+2dzdu\,\frac{-q-n+1}{p+n}+1\times u\,\overline{dz}^{2}}$,

che con dividerla per $b^{c\times\overline{i+n-1}}$, e ridurre $\frac{-q-n+1}{p+n}+1$ a

$\frac{-q+p+1}{p+n}$ diventa [E] $a\left(\frac{q+n-1}{p+n}\right)^{n}\overline{dz}^{n} =$

$eu^{q}\times\overline{du+udz}^{n-2}\times\overline{d^2u+2dzdu\,\frac{-q+p+1}{p+n}\times u\,\overline{dz}^{2}}$, in cui non entra

che la fola variabile u, mancando l'altra z; che però a norma del num. 428. si faccia $dz = tdu$ [t è una nuova variabile], e si cerchi mediante questa equazione il valore di d^2u da fostituirsi nell'equazione (E) nel qual modo nell'equazione (E) non entreranno più, che i differenziali primi. Si differenzi pertanto questa equazione $dz = tdu$, e si avrà $d^2z = dtdu + td^2u$, da cui si prenda il valore di

d^2u, che è $d^2u = \frac{d^2z - dtdu}{t}$ = (con fostituirvi il precedente trovato valore di

d^2z, che è $-m\,\overline{dz}^{2} = -\frac{\overline{q-n+1}}{p+n}\times t^2\,\overline{du}^{2}$ mediante il fostituire il valore

di $m = \frac{q+n-1}{p+n}$, e il valore di $\overline{dz}^{2}$ prefo dall'equazione $dz = tdu$, che è

t^2

$t^2\,\overline{du}^2)\ \dfrac{\overline{-q-n+1}}{p+n}\times t\,\overline{du}^2 - \dfrac{dt\,du}{t}$. Poſcia ſi ſoſtituiſcano nell' equazione (E) i valori di $\overline{dz}^n$, di $\overline{dz}^2$, di dz, e di d^2u, e ſi avrà finalmente

$$(F)\ a\times\left\{\frac{q+n-1}{p+n}\right\}^n\times t^n\,\overline{du}^n =$$

$$eu^q\times\overline{du+tudu}^{\,n-2}\times\overline{-\frac{\overline{q-n+1}}{p+n}\times t\,\overline{du}^2-\frac{dt\,du}{t}+2t\,\overline{du}^2\,\frac{\overline{-q+p+1}}{p+n}\times ut^2\,\overline{du}^2}$$

cercata equazione differenziale di primo grado, cui ſi è ridotta la propoſta $ax^p\,\overline{dx}^n = y^q\,\overline{dy}^{\,n-2}\,d^2y$ di ſecondo. Per altro la ritrovata equazione (F) ſi può dividere per $\overline{du}^{\,n-1}$, nel qual caſo ſi riduce alla ſeguente

$$a\left\{\frac{q+n-1}{p+n}\right\}^n t^n\,du =$$

$$eu^q\times\overline{1+tu}^{\,n-2}\times\overline{-\frac{\overline{q-n+1}}{p+n}\times tdu-\frac{dt}{t}+2tdu-\frac{\overline{q+p+1}}{p+n}\times ut^2\,du},$$

o ſia (con ridurre allo ſteſſo denominatore i due termini $-\dfrac{\overline{q-n+1}}{p+n}\times tdu$, $2tdu$ così $\dfrac{\overline{-q-n+1+2p+2n}}{p+n}\times tdu = \dfrac{\overline{2p-q+n+1}}{p+n}\times tdu$)

$$\text{(G)}\quad a\left\{\frac{q+n-1}{p+n}\right\}^{n} t^{n}\,du =$$

$$eu^{q}\times\overline{1+tu}^{\,q-2}\times\overline{\frac{2p-q+n+1}{p+n}\times tdu-\frac{dt}{t}-\frac{q+p+1}{p+n}\times ut^{2}du}^{\,n}.$$

436. Di questa formola generale sarà facil cosa il far uso ne' casi particolari, bastando solo sostituirvi i valori di a, e, n, p, q presi dall' equazion data: Come se sarà proposto di ridurre a equazione di primo grado l'equazione differenziale del secondo $4x^{2}\overline{dx}^{4} = 3y\overline{dy}^{2}d^{2}y$, sarà $a=4$, $e=3$, $p=2$, $q=1$, $n=4$; che però con fare la sostituzione di questi valori l'equazione (G) si ridurrà alla seguente $4\times\left(\frac{2}{3}\right)^{4}t^{4}du = 3u\times\overline{1+tu}^{2}\times\overline{\frac{4}{3}tdu-\frac{dt}{t}+\frac{1}{3}ut^{2}du}$

cioè $64t^{4}du = 324tdu - 243dt + 729ut^{2}du - 486udt + 486ut^{3}du - 243u^{2}tdt$

$+ 81u^{2}t^{4}du$, che è la data equazione $4x^{2}\overline{dx}^{2} = 3y\overline{dy}^{2}d^{2}y$ ridotta al primo grado.

437. Passeremo in secondo luogo a quelle equazioni differenzio-differenziali, delle quali in ciascun termine le variabili coi loro differenziali ascendono a egual numero di dimensioni. Sia pertanto proposta da ridursi al primo grado l'equazion generale differenzio-differenziale $ax^{m-1}y^{-m}\overline{dx}^{n}\overline{dy}^{2-n} +$ $ex^{p-1}y^{-p}\overline{dx}^{q}\overline{dy}^{2-q} + ex^{r-1}y^{-r}\overline{dx}^{t}\overline{dy}^{2-t} = d^{2}y$ (si è assunto costante l'elemento dx), che ho presa di quartro termini, ma che può costare di quanti si vogliono, purchè in ciascuno sia lo stesso il numero delle dimensioni delle variabili, e de' loro differenziali. Ora per ridurre questa equazione faccio $x = b^{z}$, $y = b^{z}u$; onde si avrà $dx = b^{z}dz$; $d^{2}x = b^{z}\times\overline{d^{2}z+\overline{dz}^{2}}$;

$dy = b^{z}\times\overline{du+udz}$; $d^{2}y = b^{z}\times\overline{d^{2}u+2dzdu+u\overline{dz}^{2}+ud^{2}z}$: E siccome è stato preso costante l'elemento dx, perciò è $d^{2}x = 0$, o sia $b^{z}\times\overline{d^{2}z+\overline{dz}^{2}}$ $= 0$, da cui si ricava $d^{2}z = -\overline{dz}^{2}$, il qual valore di $d^{2}z$ sostituito nell' espressione di $d^{2}y$; dà $d^{2}y = b^{z}\times\overline{d^{2}u+2dzdu}$; $x^{m-1} = b^{mz-z}$; x^{p-1}

$= b$

Digitized by Google

$= b^{pz-z}$; $x^{r-1} = b^{rz-z}$; $y^{-m} = b^{-mz}\, u^{-m}$; $y^{-p} = b^{-pz}\, u^{-p}$; $y^{-r} = b^{-rz}\, u^{-r}$; $\overline{dx}^{n} = b^{nz}\, \overline{dz}^{n}$; $\overline{dx}^{q} = b^{qz}\, \overline{dz}^{q}$; $\overline{dx}^{t} = b^{tz}\, \overline{dz}^{t}$; $\overline{dy}^{2-n} = b^{2z-nz} \times \overline{du + udz}^{2-n}$; $\overline{dy}^{2-q} = b^{2z-qz} \times \overline{du + udz}^{2-q}$; $\overline{dy}^{2-t} = b^{2z-tz} \times \overline{du + udz}^{2-t}$. Se pertanto nell' equazione propoſta ſi faranno le ſoſtituzioni di queſti valori, eſſa ſi ridurrà alla ſeguente $ab^{mz-z} \times b^{-mz}\, u^{-m} \times b^{nz}\,\overline{dz}^{n} \times b^{2z-nz} \times \overline{du + udz}^{2-n} +$ $cb^{pz-z} \times b^{-pz}\, u^{-p} \times b^{qz}\,\overline{dz}^{q} \times b^{2z-qz} \times \overline{du + udz}^{2-q} +$ $eb^{rz-z} \times b^{-rz}\, u^{-r} \times b^{tz}\,\overline{dz}^{t} \times b^{2z-tz} \times \overline{du + udz}^{2-t} = b^{z} \times \overline{d^2u + 2dzdu}$, che ſi riduce ad $ab^{z}\, u^{-m}\, \overline{dz}^{n} \times \overline{du + udz}^{2-m} +$ $cb^{z}\, u^{-p}\, \overline{dz}^{q} \times \overline{du + udz}^{2-q} + eb^{z}\, u^{-r}\, \overline{dz}^{t} \times \overline{du + udz}^{2-t} =$ $b^{z} \times \overline{d^2u + 2dzdu}$, o ſia (con dividere per b^{z})

[H] $au^{-m}\, \overline{dz}^{n} \times \overline{du + udz}^{2-n} + cu^{-p}\, \overline{dz}^{q} \times \overline{du + udz}^{2-q} +$ $eu^{-r}\, \overline{\tfrac{1}{ez}}^{t} \times \overline{du + udz}^{2-t} = d^2u + 2dzdu$. Eſſendoſi ridotta l'equazione a non contenere più, che una ſola variabile, ſi potrà adeſſo abbaſſare al primo grado operando a norma del num. 428, cioè a dire perchè manca la variabile z, ſi faccia $dz = sdu$, dalla quale mediante la differenziazione ſi prenda il valore di d^2u da ſoſtituirſi nella precedente equazione. Differenziando adunque l'equazione $dz = sdu$ ne viene $d^2z = dsdu + sd^2u$, da cui ſi ottiene

$d^2u = \dfrac{d^2z - dsdu}{s}$, vale a dire [perchè ſi è trovato $d^2z = -\overline{dz}^{2}$, e $-\overline{dz}^{2} = -s^2\,\overline{du}^{2}$, come ſi ricava dalla ſteſſa equazione $dz = sdu$] $d^2u = \dfrac{-s^2\,\overline{du}^{2} - dsdu}{s}$. Si ſoſtituiſca pertanto nell' equazione (H) queſto valore di d^2u, e il valore di dz, e con ciò eſſa ſi ridurrà alla ſeguente

$au^{-m}\, s^{n}\,\overline{du}^{n} \times \overline{du + usdu}^{2-n} + cu^{-p}\, s^{q}\,\overline{du}^{q} \times \overline{du + usdu}^{2-q} +$

Digitized by Google

$eu^{-r}\, s^t\, \overline{du}^{\,t} \times \overline{du+usdu}^{\,2-t} = -\frac{s^2\,\overline{du}^{\,2} - dsdu}{s} + 2s\,\overline{au}^{\,2}$, o sia

(K) $au^{-m}\, s^n\, du \times \overline{1+us}^{\,2-n} + cu^{-p}\, s^q\, du \times \overline{1+us}^{\,2-q} +$

$eu^{-r}\, s^t\, du \times \overline{1+us}^{\,2-t} = -\frac{ds}{s} + sdu$ cercata equazione differenziale ridotta al primo grado.

438. E' superfluo il fare l' applicazione di questa formola generale al caso particolare, mentre il modo d' operare è lo stesso di quello praticato al num. 436. Solamente debbo avvertire, che se la proposta equazione differenzio-differenziale da ridursi al primo grado avrà minor numero di termini di quello ha l' assunta equazione generale, in tal caso si prevalerà della formola generale ommettendo in essa que' termini, che relativamente all' equazione data vi sono di più: Se poi l' equazion data da ridursi costerà d' un numero maggiore di termini, di quello ne contiene la presa equazion generale, in tal caso perchè nella formola generale tutti i termini hanno egual forma, e solamente variano gli esponenti delle quantità componenti questi termini, si potrà sul momento aggiungere alla formola generale quanti altri termini si vogliono corrispondentemente al numero de' termini, che ha la data equazione differenzio-differenziale da ridursi, e in grazia della quale si vuol far uso della formola generale.

439. Vengono in terzo luogo da ridursi al primo grado quelle equazioni differenzio-differenziali, in ciascun termine delle quali è la stessa la somma degli esponenti d' una delle variabili, e del suo differenziale, o de' suoi differenziali, e il differenziale d' una qualsisia di queste variabili si assume costante. Prendiamo in primo luogo l' equazion generale $\overline{dx}^{\,p}\, d^2y = Mx^p\, \overline{dy}^{\,p+2} +$ $Nx^{p-q}\, \overline{dx}^{\,q}\, dy^{p+2-q} + Px^{p-t}\, \overline{dx}^{\,t}\, \overline{dy}^{\,p+2-t}$ + ec., in cui l'elemento dx della variabile, che in ciascun termine ascende allo stesso numero di dimensioni è costante, e in ciascun termine la somma degli esponenti di x, e di dx è $=p$: Le lettere poi M, N, P rappresentano qualsivoglia funzione di y. Rispetto alle equazioni di questa natura basta per ridurle al primo grado d' una sola sostituzione, che è di fare $x = b^z$, il di cui differenziale è $dx = b^z dz$; onde sarà $\overline{dx}^{\,p} = b^{pz}\,\overline{dz}^{\,p}$; $\overline{dx}^{\,q} = b^{qz}\,\overline{dz}^{\,q}$; $\overline{dx}^{\,t} = b^{tz}\,\overline{dz}^{\,t}$; $x^p = b^{pz}$; $x^{p-q} = b^{pz-qz}$; $x^{p-t} = b^{pz-tz}$. Si faccia pertanto la sostituzione di questi valori nella proposta equazion generale, e con ciò essa si ridurrà alla seguente $b^{pz}\,\overline{az}^{\,p}\, d^2y = M\, b^{pz}\,\overline{dy}^{\,p+2} + Nb^{pz-qz}\, b^{qz}\,\overline{dz}^{\,q}\, dy^{p+2-q} +$ $Pb^{pz-tz}\, b^{tz}\,\overline{dz}^{\,t}\, \overline{dy}^{\,p+2-t}$, o sia $b^{pz}\,\overline{dz}^{\,p}\, d^2y = Mb^{pz}\,\overline{dy}^{\,p+2} +$

Nb

$Nb^{pz}\,\overline{dz}^{q}\,\overline{dy}^{p+2-q} + Pb^{pz}\,\overline{dz}^{r}\,\overline{dy}^{p+2-r}$, che divisa per b^{pz} diventa finalmente [P] $\overline{dz}^{p}\,d^2y = M\,\overline{dy}^{p+2} + N\,\overline{dz}^{q}\,\overline{dy}^{p+2-q} + P\,\overline{dz}^{r}\,\overline{dy}^{p+2-r}$. Ed ecco ridotta l' equazione data a non contenere più, che la variabile y, e in conseguenza ridotta a poter essere abbassata al primo grado col metodo del num. 428. Per farlo adunque si ponga $dz = udy$ (poichè manca la variabile z), che si differenzi a fine di avere il valore di d^2y da sostituirsi nell' equazione (P), e ne verrà $d^2z = dudy + ud^2y$, onde si ha (Q) $d^2y = \frac{d^2z - dudy}{u}$: Ma quì si deve togliere il differenziale d^2z, lo che si ottiene mediante la precedente equazione $dx = b^z dz$, la quale differenziata somministra $d^2x = b^z \times \overline{\overline{dz}^2 + d^2z}$, che (a motivo d' essere stato preso costante l' elemento dx) trovasi essere $d^2x = b^z \times \overline{\overline{dz}^2 + d^2z} = 0$, da cui si ricava $d^2z = -\overline{dz}^2 = -u^2\,\overline{dy}^2$, come si deduce dall' equazione $dz = udy$, che elevata al quadrato è $\overline{dz}^2 = u^2\,\overline{dy}^2$. Fatta adunque la sostituzione di questo valore di d^2z nell' equazione [Q], si ha $d^2y = -\frac{u^2\,\overline{dy}^2 - dudy}{u}$: Che però mediante la sostituzione di questi valori di dz, e di d^2y l' equazione [P] si riduce alla seguente $u^p\,\overline{dy}^p \times \overline{\frac{-u^2\,\overline{dy}^2 - dudy}{u}} =$ $M\,\overline{dy}^{p+2} + N u^q\,\overline{dy}^{q}\,\overline{dy}^{p+2-q} + P u^r\,\overline{dy}^{r}\,\overline{dy}^{p+2-r}$, vale a dire $-u^{p+1}\,\overline{dy}^{p+2} - u^{p-1}\,\overline{dy}^{p+1}\,du = M\,\overline{dy}^{p+2} + Nu^q\,\overline{dy}^{p+2}$ $+ P u^r\,\overline{dy}^{p+2}$, che divisa per $\overline{dy}^{p+1}$ diventa (R) $-u^{p+1}dy - udu = Mdy + Nu^q dy + Pu^r dy$ cercata equazione ridotta al primo grado.

440. Nello stesso modo si riduce al primo grado la seguente general equazione differenzio-differenziale (A) $Md^2y + Ndxdy + Py\,\overline{dx}^2 = 0$, in cui l' elemento dx è costante, e le lettere M, N, P rappresentano qualsisia funzione di x, e l' altra variabile y ascende a una sola dimensione co' suoi differenziali in ciascun termine. Si prenda questa variabile, e facciasi eguale a b^z così $y = b^z$, che si differenzi, e si avrà $dy = b^z dz$, il di cui differenziale è $d^2y = b^z \times \overline{\overline{dz}^2 + d^2z}$. Si sostituiscano questi valori di y, di dy, e di d^2y nell' equazione [A], con che essa

essa si cambierà nella seguente $M b^{z} \times \overline{\overline{d z}^{2} + d^{2} z} + N b^{z} dx dz + P b^{z} \overline{dx}^{2} = 0$, la quale divisa per b^{z} diventa [B] $M \times \overline{\overline{d z}^{2} + d^{2} z} + N dx dz + P \overline{d x}^{2} = 0$ equazione, in cui non entra più che la variabile x, conseguentemente è riducibile al primo grado a norma del num. 428. Si ponga pertanto $dz = u dx$, dalla quale equazione si ricava $\overline{d z}^{2} = u^{2} \overline{d x}^{2}$, $d^{2} z = du dx$ con ritenere costante dx. Si sostituiscano questi valori di dz, di $\overline{d z}^{2}$, e di $d^{2} z$ nell'equazione (B), lo che la ridurrà ad $M \times \overline{u^{2} \overline{d x}^{2} + du dx} + N u \overline{d x}^{2} + P \overline{d x}^{2} = 0$, cioè con dividerla per dx (C) $M \times \overline{u^{2} dx + du} + N u dx + P dx = 0$ cercata equazione differenziale di primo grado, cui si è ridotta la proposta [A].

441. Se adunque si dovrà ridurre al primo grado l'equazione differenzio differenziale $x^{2} \times \overline{a + b x^{n}} \times d^{2} y + x \times \overline{c + e x^{m}} \times dx dy + \overline{b + k x^{n}} \times y \overline{dx}^{2} = 0$, poichè è $M = x^{2} \times \overline{a + b x^{m}}$, $N = x \times \overline{c + e x^{n}}$, $P = b + k x^{m}$, si sostituiscano questi valori di M, N, P nell'equazione (C), e si avrà $x^{2} \times \overline{a + b x^{m}} \times \overline{u^{2} dx + du} + x \times \overline{c + e x^{m}} \times u dx + \overline{b + k x^{m}} \times dx = 0$ cercata equazione di primo grado.

442. Prendiamo in secondo luogo l'equazion generale $\overline{d x}^{p-1} d^{2} x = M x^{p} dy^{p+1} + N x^{p-q} \overline{dx}^{q} \overline{dy}^{p-q+1} + P x^{p-t} \overline{dx}^{t} \overline{dy}^{p-t+1}$ ec., in cui è preso costante l'elemento dy della variabile, che ha dimensioni ineguali; in ciascun termine la somma degli esponenti di x, di dx e di $d^{2} x$ è p, e le lettere M, N, P rappresentano qualsivoglia funzione di y. Come nel precedente caso si faccia $x = b^{z}$, e sarà $d x = b^{z} dz$, $d^{2} x = b^{z} \times \overline{\overline{d z}^{2} + d z}$. Si faccia la sostituzione di questi valori nella data equazion generale, e con ciò essa si cambiera nella seguente $b^{pz-z} \overline{d z}^{p-1} b^{z} \times \overline{\overline{d z}^{2} + d^{2} z} = M b^{pz} \overline{d y}^{p+1} + N b^{pz-qz} b^{qz} \overline{d z}^{q} \overline{d y}^{p-q+1} + P b^{pz-tz} b^{tz} \overline{d z}^{t} \overline{d y}^{p-t+1}$, vale a dire $b^{pz} \overline{d z}^{p+1} + b^{pz} \overline{d z}^{p-1} d^{2} z = M b^{pz} \overline{d y}^{p+1} + N b^{pz} \overline{d z}^{q} \overline{d y}^{p-q+1} + P b^{pz} \overline{d z}^{t} \overline{d y}^{p-t+1}$, che divisa per b^{pz} diviene [S] $\overline{d z}^{p+1} + \overline{d z}^{p-1} d^{2} z = M \overline{d y}^{p+1} + N \overline{dz}^{q} \overline{d y}^{p-q+1} + P \overline{d z}^{t} \overline{d y}^{p-t+1}$, per ridurre la quale niente altro più rimane, che ap-

pli-

plicarvi il metodo del num. 428, giacchè manca la variabile z. Si faccia pertanto $dz = udy$, il di cui differenziale è (poichè dy è ſtato preſo coſtante) $d^2z = d\,dy$, indi ſi ſoſtituiſcano nell' equazione [S] queſti valori di dz e di d^2z che la traſmuteranno in $u^{p+1}\,\overline{dy}^{p+1} + u^{p-1}\,\overline{dy}^{p}\,du = \mathrm{M}\,\overline{dy}^{p+1} + \mathrm{N}u^{q}\,\overline{dy}^{p+1} + \mathrm{P}\,u^{s}\,\overline{dy}^{p+1}$, che diviſa per $\overline{dy}^{p}$ trovaſi eſſere (T) $u^{p+1}\,dy + u^{p-1}\,du = \overline{\mathrm{M} + \mathrm{N}u^{q} + \mathrm{P}\,u^{s}} \times dy$ cercata equazione di primo grado.

443. Delle due formole generali trovate ai due preced. num. 439. 442., che ſono (R), (T) ſi prevalga ſecondo il biſogno ne' caſi particolari nella ſteſſa maniera praticata al num. 436.: Come ſe l'equazione da ridurſi al primo grado ſarà $2a\,\overline{dx}^{2}\,d^2x + y\,\overline{dx}^{2}\,d^2x = 3ex^3\,\overline{dy}^{4} + 4ay^2\,\overline{dx}^{3}\,dy$, ſi dovrà prevalere della formola generale [T]. Eſſa pertanto ſi riduca a queſta forma $\overline{dx}^{2}\,d^2y = \frac{3ex^3\,\overline{dy}^{4}}{2a+y} + \frac{4ay^2\,\overline{dx}^{3}\,dy}{2a+y}$, onde ſi vede eſſere $p=3$; $q=3$; $\mathrm{M} = \frac{3e}{2a+y}$; $\mathrm{N} = \frac{4ay^2}{2a+y}$; per lo che la formola generale (T) mediante le ſoſtituzioni di queſti valori diventa $u^4\,dy + u^2\,du = \frac{3e\,dy}{2a+y} + \frac{4ay^2u^3\,dy}{2a+y}$, o ſia $2au^4dy + yu^4dy + 2au^2du + yu^2du = 3edy + 4ay^2u^3dy$ cercata equazione di primo grado, alla quale ſi è ridotta la propoſta $2a\,\overline{dx}^{2}\,d^2x + y\,\overline{dx}^{2}\,d^2x = 3ex^1\,\overline{dy}^{4} + 4ay^2\,\overline{dx}^{3}\,dy$.

444. Si oſſervi, che eſſendoſi fatto $x = b^z$, è $z = l.x$, ed eſſendoſi poſto $y = b^zu$, con paſſare ai logaritmi ſi ha $ly = z'b + lu$, vale a dire $l.y = z + lu$, perchè $l.b = 1$, e ſoſtituendoſi $l.x$ in luogo di z, cui pur ora ſi è trovato eguale, ne viene $ly = l.x + l.u$. Si paſſi ai numeri, e ſi avrà $y = xu$, e in conſeguenza $u = \frac{y}{x}$.

445. Gli ſteſſi metodi, che hanno ſervito a ridurre le equazioni differenzio-differenziali al primo grado, ſervono a ridurre al ſecondo grado le equazioni differenziali del terzo; così a ridurre al terzo grado quelle del quarto ec. Ben è vero, che quanto più il grado è alto, tanto più creſce il calcolo fino a renderſi impraticabile.

446.

445 A riſerva del caſo, in cui nelle equazioni differenzio-differenziali manchi una delle variabili; che in allora ſono ſempre riducibili al primo grado, non ſappiamo fin'ora ridurre le altre, ſe non hanno una delle tre forme additate di ſopra. Dell' eſpoſto metodo di riduzione ſiamo debitori al celebre Sig. Eulero, che lo ha pubblicato negli Atti dell' Accademia di Pietroburgo all' anno 1728. Ho detto, che non ſappiamo ridurre le altre, ſe non hanno una delle tre forme additate di ſopra, intendendo però ſempre di quelle equazioni differenzio-differenziali, in cui l'elemento di una variabile ſia coſtante, poichè ſe niuno degli elementi delle due variabili ſarà ſtato aſſunto coſtante, potrà molte volte ſuccedere, che con prenderne uno per coſtante ſi poſſa ridur l'equazione a non contener più, che una ſola variabile, onde ſi poſſa abbaſſare al primo grado col metodo del num.

428. Così ſe l'equazione ſarà $\overline{dx}^2\,\overline{dy}^2 + xdxdyd^2y - ydx\,\overline{dy}^3 + y^2\,\overline{dx}^2\,d^2x = 0$, in cui neſſun elemento è ſtato preſo coſtante, ſe ſi farà coſtante l' elemento dy, ſarà $xdxdyd^2y = 0$, onde l' equazione ſi ridurrà a $\overline{dx}^2\,\overline{dy}^2 - ydx\,\overline{dy}^3 + y^2\,\overline{dx}^2\,d^2x = 0$, in cui entra la ſola variabile y.

FINE DEL QUINTO TOMO.

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
9.	32.	Delle eſtremità	Dalle eſtremità
11.	36.	$-dx \times \overline{a+x+y} \times \overline{x+z}$	$-dx \times \overline{a+x+y} \times \overline{x+u}$
15.	3.	$\dfrac{\overline{xdy+ydx \times \overline{zu+y} - zdu - udz - dy}}{\overline{zu+y}^2} \times xy$	ſi corregga così $\dfrac{\overline{xdy+ydx} \times \overline{zu+y} - zdu - udz - dy}{\overline{zu+y}^2} \times xy$
—	6.	è il differenziale	e il differenziale
20.	13., e 14.	$\dfrac{1}{\sqrt{-1}\; l.}$ ec.	$\dfrac{1}{\sqrt{-1}}\; l.$ ec.
31.	11.	$\dfrac{2 \text{ Tang. } y}{1 - \overline{\text{Tang. } y}^2}$	$\dfrac{2 \text{ Tang. } y}{\overline{1 - \text{Tang. } y}^2}$
37.	18.	$\dfrac{dx}{\text{Sen. } x^2} \ldots \dfrac{dx}{\text{Coſ.} x \text{ Sen.} x^2}$	$\dfrac{dx}{\overline{\text{Sen. } x}^2} \ldots \dfrac{dx}{\overline{\text{Coſ.} x \text{ Sen.} x}^2}$
40.	ult.	$\overline{\text{Coſ. } x^2}$	$\overline{\text{Coſ. } x}^2$
41.	1.	$\overline{\text{Coſ. } x^2}^2$	$\overline{\text{Coſ. } x}^2$
50.	11.	$+y^{r}\, l.\, y\, d^2 z$	$+y^{r-1} l.\, y\, d^2 z$
68.	11.	$X''' + 2X'' + X'$	$X''' - 2X'' + X'$
74.	26.	è $Z' = 81$	e $Z' = 81$
79.	5.	Z''' ec.	$- Z'''$ ec.
—	ult.	$+ X^{\infty} +$	$+ X^{\infty}$
123.	8	a norma del num. 122.	a norma del num. 171.
124.	3.	$-6x^{-2}$	$-6ax^{-2}$
—	16.	$d^3x d^4x$	$d^3x,\ d^4x$
152.	1.	$+ \text{ec.} y^{n}$	$+ \text{ec.})^{n}$
153.	1.	$z^{\varphi-1}\, dz$ / $\omega+\gamma-1$	$\varphi z^{\varphi-1}\, dz$ / $\omega+\gamma-1$
158.	4.	$.\, u$	ω'

167. il ſegno $\times$, che è al fine della linea 4 dev' eſſer al fine della preced. linea 3

171. in fine della lin. 3. ſi cancelli il ſegno $\times$

ERRORI	CORREZIONI
181. 5. diverrà	diverrà $y =$
235. penult. $: db:$	$:: dv$
236. 11. $= -c^2 xdx$	$= -c^2 xdx$
237. 4 che à	che è
242. 28. e alla	è alla
253. 3. ult. delle ordinate	delle abſciſſe
274. penult. è l' origine	e l' origine
290. nel fine della lin. penult. ſi cancelli il ſegno X	
292. 4 $= -\frac{6408}{1000} \sqrt{3}$	$= -\frac{6408}{1000} \sqrt{a^3}$
305. 18. $d^2 y -$	$d^2 y = -$
311. 13. $16y^2 X - \frac{1}{4} x^2 + x + 2$	$\overline{16y^2 X - \frac{1}{4} x^2 + x + 2}$

Tomo IV. pag. 134. l. 3 in vece di VA=V*b*=*m* ſi legga VE=EA=*m*

——— Tavola VII. Fig. 133. la lettera F dev' eſſere F, e *vice verſa* la F dev' eſſere F

A01 1462497

Digitized by Google

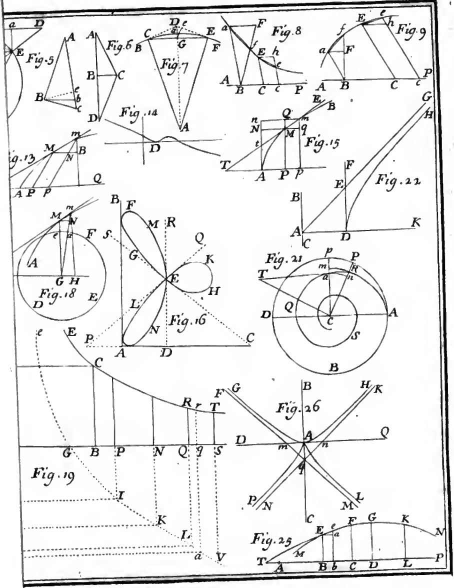
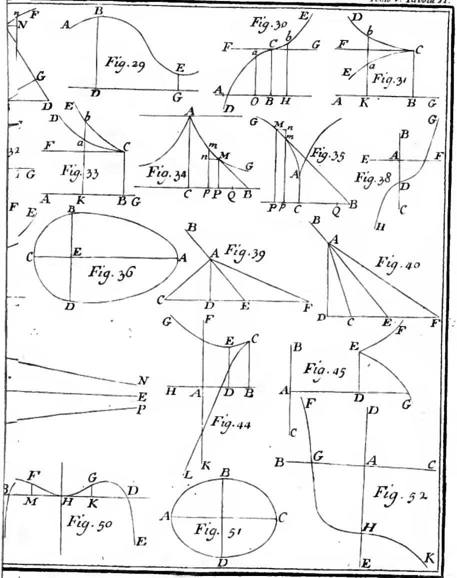


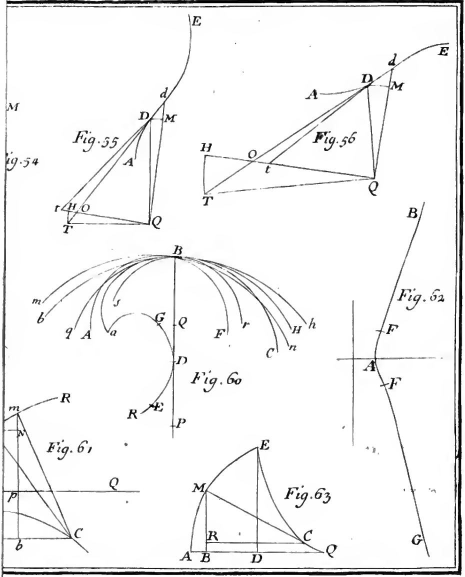
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 25
Fig. 26

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

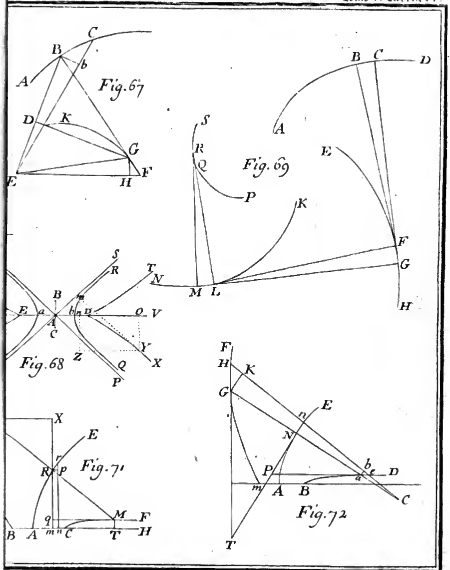


Fig. 67
Fig. 69
Fig. 68
Fig. 71
Fig. 72